Итерационни методи за решаване на СЛАУ (система линейни алгебрични уравнения)

Основна идея:

Матричен вид: $Ax = b$

$$Ax = b \iff x = Bx + \tilde{b} \Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}$$

итерационен процес, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$A(n \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

вектор от неизв.

Разгънат вид:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \quad / : a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \quad / : a_{22} \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \quad / : a_{nn} \end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ &\ldots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Метод на простата итерация (ПИ)

Методи за решаване на СЛАУ (система линейни алгебрични уравнения)

Основна идея:

Матричен вид: $Ax = b$

$$Hx = b \iff x = Bx + \tilde{b} \Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}$$

итерационен процес, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$B(n \times n) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

$$b_{ii} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Метод на простата итерация (ПИ)

$b_{11} = 0 \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{1n}$

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \frac{b_1}{a_{11}}$$

$b_{21} \quad b_{22} = 0 \quad b_{23} \quad b_{2n}$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$\vdots \qquad \ldots \qquad \tilde{b}_n$

$$x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Якоби

Итерационни методи за решаване на СЛАУ (система линейни алгебрични уравнения)

Основна идея:

Матричен вид: $Ax = b$

$$Ax = b \iff x = Bx + \tilde{b} \Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}$$

итерационен процес, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Задача:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - 1.2x_3 = 5 & |:10 \\ 0.8x_1 + 30\pi x_2 - 0.2x_3 = 0.34 & |:30\pi \\ -1.8x_1 + 2.1x_2 + 20e x_3 = -3 & |:20e \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1.2 \\ 0.8 & 30\pi & -0.2 \\ -1.8 & 2.1 & 20e \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.34 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_{ii} = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{10}x_2 + \frac{1.2}{10}x_3 + \frac{5}{10} \\ x_2 = -\frac{0.8}{30\pi}x_1 + \frac{0.2}{30\pi}x_3 + \frac{0.34}{30\pi} \\ x_3 = \frac{1.8}{20e}x_1 - \frac{2.1}{20e}x_2 - \frac{3}{20e} \end{cases}$$

Якоби — Итерационни методи за решаване на СЛАУ (Система линейни алгебрични уравнения)

Основна идея:

Матричен вид: $Ax = b$

$$Ax = b \iff x = Bx + \tilde{b} \Rightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

итерационен процес

Итерационен процес

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} + 0.12x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.0085x_1^{(k)} + 0.0021x_3^{(k)} + 0.0036 \\ x_3^{(k+1)} = 0.0331x_1^{(k)} - 0.0386x_2^{(k)} - 0.0552 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	грешка ε_k
0	10	-1	4	
1	1.18	-0.0373	0.3144	
2				
⋮				

Първа итерация: ($k=0$)

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (10, -1, 4)$

$$x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} + 0.12x_3^{(0)} + 0.5 = -0.2(-1) + 0.12 \cdot 4 + 0.5 = 1.18$$

$$x_2^{(1)} = -0.0085x_1^{(0)} + 0.0021x_3^{(0)} + 0.0036 = -0.0085 \cdot 10 - 0.0021 \cdot 4 + 0.0036 = -0,073$$

$$x_3^{(1)} = 0.0331x_1^{(0)} - 0.0386x_2^{(0)} - 0.0552 = 0.0331 \cdot 0 - 0.0386 \cdot (-1) - 1.0552 = 0,3144$$

Якоби — Итерационни методи за решаване на СЛАУ (система линейни алгебрични уравн.)

$Ax = b$

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + \tilde{b}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

I. Условия на метода на Якоби

Ако **поне** една норма $\|B\| < 1$, то методът на Якоби ще е сходящ при **всеки** избор на начално приближение.

II. Начално приближение

III. Оценка на грешката:

$$\varepsilon_k = \|x^* - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \left(\|x^{(0)}\| + \frac{\|\tilde{b}\|}{1 - \|B\|} \right)$$

$k = ? : \varepsilon_k < \varepsilon$

$$k \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|\tilde{b}\|}}{\log \|B\|}$$

Якоби — Итерационни методи за решаване на СЛАУ (система линейни алгебрични уравн.)

$$Ax = b$$

Норми на матрици и вектори

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Пример:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Sigma = 3$, $\Sigma = 15$, $\Sigma = 4$

$\Sigma = 4$, $\Sigma = 5$, $\Sigma = 13$

15

$\|B\|_1 = 15$

max

$\|B\|_\infty = 13$

$$\|B\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \iff \|b\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} |b_i|$$

$$\|B\|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| \iff \|b\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |b_i|$$

$$\|B\|_3 = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots} =$$

$$\|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2} \iff \|b\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Матрични норми — съгласувани норми — съгласувани вектори норми

$$k \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{\|x^{(0)}\| + \frac{\|b\|}{1 - \|B\|}}}{\log \|B\|}$$