

P11-2005-16

П. Х. Атанасова¹, С. Н. Димова², Т. Л. Бояджиев³

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
КРИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНЫХ
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

¹E-mail: poli@jinr.ru

²Софийский университет, Болгария. E-mail: dimova@fmi.uni-sofia.bg

³E-mail: todorlb@jinr.ru

Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов

Проведено численное моделирование устойчивости и бифуркаций конфигураций магнитного потока в двухслойном симметричном джозефсоновском контакте. В зависимости от условий эксперимента необходимо изучать либо устойчивость пар распределений магнитного потока в контакте «в целом», либо парциальную устойчивость распределений в отдельных слоях. Устойчивость в целом (глобальная устойчивость) исследуется при помощи векторной задачи Штурма–Лиувилля, первые несколько собственных значений которой позволяют судить об устойчивости или неустойчивости конкретной пары как целого. Критическая зависимость ток – магнитное поле контакта строится как огибающая бифуркационных кривых, соответствующих отдельным парам распределений. Демонстрируется хорошее качественное совпадение полученной численным путем глобальной критической кривой с экспериментальными результатами, приведенными в [5]. Показано, что в достаточно больших магнитных полях глобальная критическая кривая может иметь точки разрыва непрерывности, которые могут наблюдаться в эксперименте. Для изучения парциальной устойчивости каждому распределению магнитного потока в одном из слоев ставится в соответствие парциальная задача Штурма–Лиувилля. Показано, что с математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [6], обусловлены наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых при небольших значениях внешнего магнитного поля.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Numerical Modelling of the Critical Dependences in Two-Layered Josephson Junctions

A numerical modelling of the stability and bifurcation of static distributions of the magnetic flux in two-layered symmetric Josephson junction is carried out. Depending on the experimental conditions it is necessary to study either the stability of distribution pairs of the magnetic flux «as a whole» (global stability) or the partial stability of distributions in separate layers. The global stability is investigated by means of the vector Sturm–Liouville problem. The dependence «critical current – magnetic field» of the contact represents the envelope of the bifurcation curves corresponding to separate pairs of distributions. A good qualitative coincidence between the numerically obtained global critical curve and the experimentally obtained presented in [5] is shown. We prove that for large values of the external magnetic field the global critical curve can have points of discontinuity, which can be observed in experiment. In order to study the partial stability, each magnetic field distribution in one of the layers is associated with the partial scalar Sturm–Liouville problem. It is shown that the effects observed in experiment [6] mathematically are caused by presence of points of discontinuity of the partial critical curves at small values of the external magnetic field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

За последнее время свойства многослойных (и в частности, двухслойных) джозефсоновских контактов (ДК) исследовались рядом авторов (см., например, [4–9]). Такие структуры позволяют ставить и изучать ряд новых физических эффектов, не имеющих места в однослойных ДК, а также представляют значительный интерес для практических применений.

В рамках модели длинных ДК, учитывающей только электромагнитное взаимодействие между соседними слоями, динамика магнитного потока в ДК длины $2l$ описывается [8] системой возмущенных уравнений типа синус-Гордон

$$\phi_{tt} + \alpha \phi_t - A(s) \phi_{xx} + J_z(\phi) + \Gamma = 0, \quad t > 0, \quad x \in (-l, l). \quad (1.1)$$

Все используемые здесь и ниже величины безразмерны. О способах приведения к безразмерному виду см., например, монографию [10].

В уравнении (1.1) через t и x обозначены время и пространственная координата вдоль контакта. Соответствующим нижним индексом обозначена операция дифференцирования. В настоящей работе ограничимся рассмотрением только случая двухслойного ДК, отдельные слои которого идентичны. Тогда величина $\phi(t, x) = (\phi_1, \phi_2)^T$ есть 2-вектор магнитных потоков в «нижнем» $\phi_1(t, x)$ и «верхнем» $\phi_2(t, x)$ слоях, а вектор плотностей тока Джозефсона определяется как $J_z(\phi) = (\sin \phi_1, \sin \phi_2)^T$. Величина $\alpha \geq 0$ есть коэффициент диссипации. Внешний ток $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$, где для простоты в дальнейшем полагаем $\gamma = \text{const}$. Верхний индекс T используется для операции транспонирования. Квадратная 2-матрица $A(s)$ симметрична и зависит только от параметра связи $s \in (-1, 0]$

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналитическое выражение для величины s приведено, например, в работе [8].

Отметим, что уравнение (1.1) относится к градиентному (вариационному) виду. Пусть краевые условия в точках $x = \pm l$ не зависят явным образом от

времени t . Тогда внутренняя энергия (функционал Ляпунова)

$$E(t) = \int_{-l}^l \left\{ \frac{1}{2} [\phi_t^2 + \langle \phi_x, A\phi_x \rangle] + U(\phi) \right\} dx,$$

связанная с конкретным ограниченным решением $\phi(t, x)$, убывает во времени

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \int_{-l}^l \phi_t^2(t, x) dt \leq 0. \quad (1.2)$$

Угловыми скобками $\langle a, b \rangle$ обозначена операция скалярного произведения 2-векторов a и b . Плотность токов $U(\phi)$ определяется через градиент $U_\phi(\phi) = J_z(\phi) + \Gamma$, что дает

$$U(\phi) = 2 - \cos \phi_1 - \cos \phi_2 + \gamma (\phi_1 + \phi_2).$$

Из соотношения (1.2) вытекает простой, но важный вывод, что любое ограниченное решение $\phi(t, x)$ уравнения (1.1) при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому статическому (не зависящему от времени t) распределению $\varphi(x) \equiv (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$.

Уравнение (1.1) имеет, как правило, более чем одно статическое решение. Поэтому для того, чтобы определить конечное состояние контакта, необходимо исследовать статические решения на устойчивость. В геометрии с перекрытием (overlap) 2-вектор (пара) статических распределений магнитного потока $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ в ДК удовлетворяет краевой задаче

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (1.3a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H, \quad (1.3b)$$

где 2-вектор $H = h_B(1, 1)^T$, а постоянная h_B представляет собой внешнее магнитное поле. Отметим, что решения (1.3) зависят гладким образом как от физической координаты x , так и от параметров l, s, h_B и γ , т.е. $\varphi = \varphi(x, p)$, где через $p \equiv \{l, s, h_B, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ обозначен 4-вектор параметров модели. В дальнейшем зависимость от p выписываем только при необходимости.

Для полноты изложения коротко остановимся на некоторых основных типах статических решений в однослойных ДК. При коэффициенте связи $s \rightarrow 0$ аналогичные решения имеются и в двухслойных ДК.

В нулевом магнитном поле ($h_B = 0$) и при нулевом токе ($\gamma = 0$) каждое из уравнений (1.3a) имеет набор мейсснеровских (тривиальных) решений вида $\varphi(x) = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ В частности, решение $\varphi(x) = 0$ устойчивое,

а $\varphi(x) = \pi$ — неустойчивое. Далее устойчивые мейсснеровские решения обозначаем коротко через M .

Более сложными являются решения, соответствующие вихревым распределениям магнитного потока в контакте. Простейшими вихревыми решениями являются флюксонное/антифлюксонное решения (ниже используются сокращенные обозначения Φ и Φ^{-1}), для которых в «бесконечном» контакте ($l \rightarrow \infty$) при $h_B = 0$ и $\gamma = 0$ имеются известные точные аналитические выражения $\varphi(x) = 4 \arctan \exp(\pm x) + 2k\pi$. В контактах конечной длины такие объекты не являются флюксонами в строгом смысле слова, но ряд их особенностей, в частности конечные энергия и размеры, обуславливают целесообразность и удобство использования такой терминологии.

При $|h_B| \geq 0$, $\gamma = 0$ в однослойном контакте конечной длины $2l$ могут существовать многофлюксонные распределения, для которых ниже используются обозначения вида Φ^n (для основного флюксона далее для краткости полагаем $\Phi^1 \equiv \Phi$). Здесь целое число $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ есть число вихрей, определяемое как функционал [2]

$$n \equiv N[\varphi](p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x, p) dx. \quad (1.4)$$

Для «бесконечного» контакта выражение в правой части следует понимать в смысле предельного перехода. Знак n определяет направление магнитного поля вихря.

Для зависящих от времени решений $\phi(t, x)$ нестационарной задачи (1.1) функция $N[\phi](t)$ и среднее напряжение на контакте $\bar{V}(t)$ связаны очевидным соотношением

$$\bar{V}(t) \equiv \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi_t(t, x) dx = \pi N_t[\phi](t).$$

Таким образом, независимость числа флюксонов в контакте от времени t (т. е. $N_t = 0$) эквивалентна равенству нулю среднего напряжения на контакте.

В качестве примеров отметим, что при внешнем токе $\gamma = 0$ и любом допустимом поле h_B M -решение и n -флюксонное распределение Φ^n характеризуются соответственно значениями $N[M] = 0$ и $N[\Phi^n] = n$ (для n -антифлюксонов соответственно $N[\Phi^{-n}] = -n$). Для иллюстрации на рис. 1 представлены Φ -кривые ($n = 1$) при $\gamma = 0$ для трех значений внешнего магнитного поля h_B . В рассматриваемом случае геометрически сохранение величины $N[\Phi]$ означает сохранение соответствующих площадей под кривыми при изменении поля h_B , причем высота «центра» $\varphi(0) = \pi$ также не зависит от h_B .

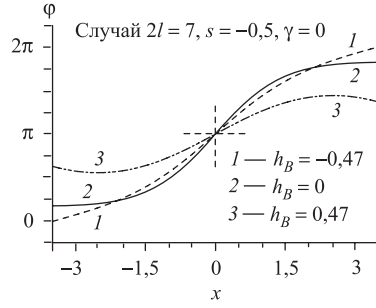


Рис. 1. Число флюксонов $N[\Phi]$ сохраняется при изменении h_B

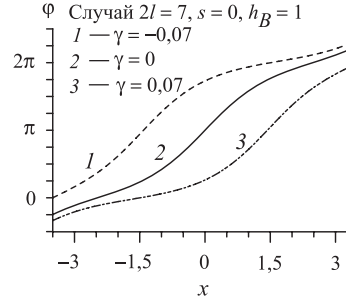


Рис. 2. Число флюксонов $N[\Phi]$ меняется при изменении γ

В заданном поле h_B внешний ток $\gamma \neq 0$ выталкивает магнитное поле из ДК, смещая его от центра $x = 0$ направо ($\gamma > 0$) или налево ($\gamma < 0$). Этот эффект иллюстрируется на рис. 2 для Φ -распределения в поле $h_B = 1$ при трех значениях параметра γ . Для распределений вида Φ^n число вихрей (1.4) при $\gamma \neq 0$ становится дробным. При критическом значении тока γ_{cr} первоначально устойчивое распределение «срывается» и переходит в неустойчивое состояние. В эксперименте потеря устойчивости (срыв) распределения с наибольшим критическим током при заданном магнитном поле h_B соответствует переходу из состояния с нулевым напряжением на ДК на квази-частичную ветвь вольтамперной характеристики. С математической же точки зрения срыв некоторого распределения означает, что происходит бифуркация конкретного решения задачи (1.3) при изменении параметра γ [1].

При некоторых значениях параметров h_B и γ в ДК могут существовать более сложные вихревые конфигурации, которые можно рассматривать как результат нелинейного взаимодействия цепочек флюксонов и/или антифлюксонов. Такие решения, которые обозначаем через $\Phi^n \Phi^m$, $|n| + |m| > 0$, могут иметь дробное число вихрей (1.4) и при заданном h_B существуют парами, соответствующими перестановке «степеней» $n \leftrightarrow m$. При этом сумма чисел вихрей пары является целым числом [2]. Простейший пример — бризерные решения, обозначаемые далее через B и B^{-1} , для которых при $\gamma = 0$ выполнено $N[B] = 1$, $N[B^{-1}] = -1$.

В двухслойном ДК при $s < 0$ распределения магнитного потока в отдельных слоях деформируются из-за взаимодействия между слоями, образуя при этом связанные пары. При одних и тех же значениях параметров h_B и γ распределения в отдельных слоях, а также соответствующая им пара распределений могут быть устойчивыми либо неустойчивыми. В эксперименте переход к неустойчивости при достижении критического тока $\gamma = \gamma_{cr}$ выражается в скачкообразном возникновении разности потенциалов либо на одном

из слоев, либо на контакте в целом (см. рис. 1 в работе [5]). В многослойных ДК ситуация существенно усложняется тем, что возможны эксперименты по определению критического тока для отдельных слоев, групп слоев, а также структуры в целом.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Вариационный принцип. Уравнение (1.3а) и краевые условия (1.3б) могут рассматриваться как необходимые условия экстремума функционала полной энергии контакта

$$F[\varphi] = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} \langle \varphi_x, A\varphi_x \rangle + U(\varphi) \right] dx - \langle AH, \Delta\varphi \rangle. \quad (2.1)$$

Здесь и ниже величина $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2)^T$ есть 2-вектор полного магнитного потока

$$\Delta\varphi = \varphi(l) - \varphi(-l). \quad (2.2)$$

Область определения функционала (2.1) есть множество всех гладких на отрезке $[-l, l]$ 2-вектор-функций $\varphi(x)$, концы которых лежат на вертикальных прямых $x = -l$ и $x = l$. Тогда легко проверить, что (1.3а) представляет собой уравнение Эйлера–Лагранжа для (2.1), а краевые условия (1.3б) вытекают из условия Вейерштрасса–Эрдмана [14].

При дальнейших рассмотрениях удобно переписать полную энергию (2.1) в виде суммы

$$F[\varphi] = F_1 + F_2 + F_{12}. \quad (2.3)$$

Здесь F_i , $i = 1, 2$, — энергии невзаимодействующих слоев:

$$F_1[\varphi_1] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \varphi_{1,x}^2 + 1 - \cos \varphi_1 + \gamma \varphi_1 \right) dx - h_B \Delta\varphi_1, \quad (2.4a)$$

$$F_2[\varphi_2] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \varphi_{2,x}^2 + 1 - \cos \varphi_2 + \gamma \varphi_2 \right) dx - h_B \Delta\varphi_2, \quad (2.4b)$$

а энергия связи F_{12} вычисляется как

$$F_{12}[\varphi_1, \varphi_2] = -\frac{s}{1-s^2} \int_{-l}^l \left[\varphi_{1,x} \varphi_{2,x} - \frac{s}{2} (\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{2,x}^2) \right] dx + \frac{s}{1+s} h_B (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2). \quad (2.5)$$

При теоретическом рассмотрении изучение устойчивости пары распределений $\varphi(x)$ в контакте сводится [7] к нахождению первых нескольких собственных значений матричной задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом, определяемым функциями $\varphi_i(x)$ (см. ниже). В таком подходе устойчивость пары $\varphi(x)$ эквивалентна положительной определенности второй вариации функционала энергии ДК (2.3).

Для анализа устойчивости распределений магнитного потока в одном из слоев (например, в первом) необходимо применить методы теории устойчивости по части переменных (парциальной устойчивости) [3]. В этом случае для устойчивости распределения $\varphi_1(x)$ требуется положительная определенность второй вариации суммы энергии (2.4а) и энергии взаимодействия (2.5) при заданном $\varphi_2(x)$. Аналогично, для устойчивости распределения $\varphi_2(x)$ требуется положительная определенность второй вариации суммы энергии (2.4б) и энергии взаимодействия (2.5) при заданном $\varphi_1(x)$.

Таким образом, какой именно вид устойчивости необходимо использовать при теоретическом рассмотрении многослойных джозефсоновских структур, определяется условиями эксперимента.

Устойчивость «в целом» распределений в ДК. Рассмотрим сначала условия устойчивости некоторой пары распределений $\varphi(x)$ в контакте [7]. Для удобства далее будем говорить об устойчивости пары в целом (глобальной устойчивости пары).

Для исследования характера экстремума функционала (2.1) в точке $\varphi(x)$ рассмотрим некоторое отклонение $\varphi(x) + \epsilon\psi(x)$ от $\varphi(x)$, зависящее от параметра ϵ . Предполагается, что 2-вектор-функция $\psi \equiv (\psi_1, \psi_2)^T$ имеет ту же гладкость, что и $\varphi(x)$. Подставляя в (2.1), запишем вторую вариацию функционала энергии в виде

$$\delta^2 F[\psi] = \frac{1}{2} \int_{-l}^l [\langle \psi_x, A\psi_x \rangle + \langle \psi, Q(x)\psi \rangle] dx. \quad (2.6)$$

Здесь квадратная диагональная матрица $Q \equiv U_{\varphi\varphi}(\varphi) = \text{diag}(\cos \varphi_1(x), \cos \varphi_2(x))$. Отсюда обычным образом (см., напр., [1, 11–13]) приходим к регулярной матричной задаче Штурма–Лиувилля (ЗШЛ)

$$-A\psi_{xx} + Q(x)\psi = \lambda\psi, \quad (2.7a)$$

$$\psi_x(\pm l) = 0, \quad (2.7b)$$

$$\int_{-l}^l \langle \psi, \psi \rangle dx - 1 = 0, \quad (2.7c)$$

с потенциалом $Q(x)$. Спектр задачи (2.7) дискретен и ограничен снизу

$$\lambda_{\min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

При этом каждому собственному значению (СЗ) λ_n , $n = 0, 1, \dots$, соответствует единственная собственная функция (СФ) $\psi_n(x) \equiv (\psi_{1n}(x), \psi_{2n}(x))^T$, удовлетворяющая условию нормировки (2.7с).

Так как потенциал $Q(x)$ определяется через решения нелинейной краевой задачи (1.3), то СЗ и СФ полной задачи Штурма–Лиувилля (2.7) также будут гладкими функциями этих параметров, т. е. $\lambda_n = \lambda_n(p)$, $\psi_n = \psi_n(x, p)$.

Будем говорить, что имеет место бифуркация порядка $n \geq 0$ распределения $\varphi(x)$, если СЗ с номером n соответствующей ЗШтЛ (2.7) удовлетворяет условию

$$\lambda_n(p) = 0. \quad (2.8)$$

Бифуркация минимального порядка $n = 0$ соответствует бифуркации устойчивого [11] статического распределения $\varphi(x)$ в неустойчивое и наоборот. При этом (2.7а) представляет собой уравнение Якоби [14] для функционала (2.1). Для устойчивых решений выполняется $\lambda_0(p) > 0$ и, следовательно, имеет место положительная определенность второй вариации (2.6) полной энергии (2.1) контакта.

Таким образом, по спектру ЗШтЛ (2.7) можно судить об устойчивости пары $\varphi(x)$ как целом. Поэтому при $\lambda_0 > 0$ целесообразно назвать решение $\varphi(x)$ устойчивым в целом (глобально устойчивым). Аналогично, если $\lambda_0 < 0$, то решение $\varphi(x)$ будем называть глобально неустойчивым. Соответственно, задачу (2.7) будем называть глобальной ЗШтЛ.

При $n > 0$ имеет место бифуркация глобально неустойчивого решения задачи (1.3) в некоторое другое глобально неустойчивое решение.

В дальнейшем будем считать, что длина $2l$ контакта и параметр связи s фиксированы. Уравнение

$$\lambda_0(h_B, \gamma) = 0 \quad (2.9)$$

определяет в неявном виде бифуркационную кривую для распределения $\varphi(x)$ на параметрической плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma} \equiv \{h_B, \gamma\} \in \mathbb{R}^2$.

Парциальная устойчивость распределений в слоях ДК. Пусть $\varphi_2(x)$ — некоторое фиксированное распределение магнитного потока во втором слое, удовлетворяющее вместе с распределением $\varphi_1(x)$ задаче (1.3). Рассмотрим однопараметрическое возмущение $\varphi_1(x) + \epsilon u_1(x)$ состояния $\varphi_1(x)$ в первом слое контакта. Тогда из условия экстремума второй вариации функционала $F_1 + F_{12}$ приходим к парциальной ЗШтЛ

$$-a_{11}u_{1,xx} + q_1(x)u_1 = \mu_1 u_1, \quad (2.10a)$$

$$u_{1,x}(\pm l) = 0, \quad (2.10b)$$

$$\int_{-l}^l u_1^2(x) dx - 1 = 0, \quad (2.10c)$$

потенциал которой $q_1(x) \equiv Q_{11}(x) = \cos \varphi_1(x)$ определяется через решение $\varphi_1(x)$. На конечном отрезке $[-l, l]$ задача (2.10) имеет ограниченный снизу дискретный спектр [14]. При этом каждому СЗ μ_{1n} отвечает единственная собственная функция $u_{1n}(x)$, для которой выполнено условие нормировки (2.10с). Число нулей $u_{1n}(x)$ на отрезке $(-l, l)$ равно n . В частности, СФ $u_{10}(x)$, соответствующая минимальному СЗ μ_{10} , не имеет нулей при $x \in (-l, l)$.

Парциальные бифуркации конкретного распределения $\varphi_1(x, p)$ порядка $n \geq 0$ определяются аналогично формуле (2.8) при помощи уравнения $\mu_{1n}(p) = 0$. При $\mu_{10}(p) > 0$ функционал второй вариации $\delta^2(F_1 + F_{12})$ положительно определен. Бифуркационная зависимость ток – магнитное поле для распределения $\varphi_1(x)$ представляет собой геометрическое место точек на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma}$, таких, что

$$\mu_{10}(h_B, \gamma) = 0. \quad (2.11)$$

Совершенно аналогично можно получить ЗШТЛ, соответствующую возмущению функции $\varphi_2(x)$ при заданной $\varphi_1(x)$

$$-a_{22}u_{2,xx} + q_2(x)u_2 = \mu_2 u_2, \quad (2.12a)$$

$$u_{2,x}(\pm l) = 0, \quad (2.12b)$$

$$\int_{-l}^l u_2^2(x) dx - 1 = 0. \quad (2.12c)$$

Здесь $q_2(x) \equiv Q_{22}(x) = \cos \varphi_2(x)$.

Уравнение парциальной бифуркации порядка $n \geq 0$ конкретного распределения $\varphi_2(x, p)$ имеет вид $\mu_{2n}(p) = 0$. При $\mu_{20}(p) > 0$ функционал $\delta^2(F_2 + F_{12})$ положительно определен. Уравнение бифуркаций распределения $\varphi_2(x)$ на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma}$ имеет вид

$$\mu_{20}(h_B, \gamma) = 0. \quad (2.13)$$

Отметим, что в однослойных ДК бифуркации порядка $n \geq 1$ представляют собой главным образом математический интерес, что обусловлено малым временем жизни [1] неустойчивых распределений. В двухслойных ДК, как будет продемонстрировано ниже, благодаря взаимодействию между слоями парциальные бифуркации высших порядков магнитных потоков могут играть существенную роль (см. ниже).

Таким образом, устойчивость каждой пары распределений магнитного потока φ в контакте характеризуется знаком трех СЗ: μ_{10} , μ_{20} и λ_0 . Удобно ввести в рассмотрение вектор-строку $\sigma = (m_1, m_2, k)$ с целочисленными координатами $m_1 = \text{sign}(\mu_{10})$, $m_2 = \text{sign}(\mu_{20})$ и $k = \text{sign}(\lambda_0)$. Величину

σ будем называть сигнатурой пары φ . Из физических соображений можно предположить, что если хотя бы одно из чисел m_1 и m_2 неположительно, то $k \leq 0$. Конкретные примеры рассматриваются ниже.

Рассмотрим важный частный случай. Будем говорить, что решение $\varphi(x)$ уравнения (1.3а) симметрично [5] (пара $\varphi(x)$ симметрична), если выполнено $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Примеры симметричных пар решений представлены ниже. Для симметричных распределений магнитного потока краевая задача (1.3), а также ЗШТЛ (2.7) существенно упрощаются (для удобства индекс координаты опускается)

$$-a \varphi_{xx} + \sin \varphi + \gamma = 0, \quad (2.14a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = h_B, \quad (2.14b)$$

$$-a \psi_{xx} + \cos \varphi \psi = \lambda \psi, \quad (2.15a)$$

$$\psi_x(\pm l) = 0, \quad (2.15b)$$

$$\int_{-l}^l \psi^2(x) dx - 1 = 0. \quad (2.15c)$$

Здесь коэффициент $a = a_{11} + a_{12} = 1/(1 + s)$, $a \in [1, \infty)$, причем $a \geq a_{11}$.

Отметим, что уравнения Штурма–Лиувилля для парциальной устойчивости (2.10а) и устойчивости в целом (2.15а) совпадают только при отсутствии взаимодействия между слоями, т. е. только в случае $s = 0$.

Разложим СФ $u_0(x)$, соответствующую минимальному СЗ μ_0 задачи (2.10), в равномерно сходящийся в интервале $[-l, l]$ ряд по СФ $\psi_n(x)$ задачи (2.15)

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \psi_n(x), \quad \text{где } \alpha_n = \int_{-l}^l u_0(x) \psi_n(x) dx.$$

Подставляя выражение для $u_0(x)$ в (2.15) и учитывая (2.10), получаем следующую важную связь между глобальным λ_0 и парциальным μ_0 СЗ:

$$\lambda_0(p) = \mu_0(p) + b_0(p), \quad (2.16)$$

где коэффициент

$$b_0(p) = a_{12} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{\alpha_0} \int_{-l}^l u_{0,x}(x) u_{n,x}(x) dx.$$

Пусть теперь для некоторого несимметричного решения $\varphi(x)$, ($\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$) вычислены СЗ и СФ глобальной (2.7) и парциальных (2.10) и (2.12)

ЗШТЛ. Разложим вектор $u_0(x) = (u_{10}(x), u_{20}(x))^T$ в ряд по базису $\{\psi_n(x)\}$ из СФ задачи (2.7)

$$u_0(x) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \psi_n(x), \quad \beta_n = \int_{-l}^l \langle u_0, \psi_n \rangle dx.$$

Учитывая (2.7), находим

$$\lambda_0(p) = c_1(p)\mu_{10}(p) + c_2(p)\mu_{20}(p) + d_0(p). \quad (2.17)$$

Здесь коэффициенты

$$c_i = \sum_{n \geq 0} \frac{\beta_n}{\beta_0} \int_{-l}^l \psi_{0i} \psi_{ni} dx, \quad d_0 = a_{12} \sum_{n \geq 0} \frac{\beta_n}{\beta_0} \int_{-l}^l (\psi_{01,x} \psi_{n2,x} + \psi_{02,x} \psi_{n1,x}) dx.$$

Из выражений (2.16) и (2.17) формально вытекает, что в рамках модели (1.3) для $s < 0$ парциальная устойчивость распределений в слоях не гарантирует устойчивости контакта «в целом», т. е. при $\mu_{i0} > 0$ возможно, чтобы $\lambda_0 \leq 0$. Аналогично, из глобальной устойчивости ($\lambda_0 > 0$) необязательно следует парциальная устойчивость ($\mu_{i0} > 0$) распределений в отдельных слоях.

2.1. Вычисление точек бифуркации

Рассмотрим сначала случай устойчивости контакта «в целом».

Общее решение системы уравнений (1.3), (2.7) зависит от пяти параметров (p, λ) . Для вычисления некоторого частного решения необходимо зафиксировать четыре из них, тогда пятый определяется как решение системы. В простейшем случае, когда заданы все величины p , задача расщепляется на независимые подсистемы (1.3) и (2.7). При этом искомым является СЗ λ , что соответствует проверке глобальной устойчивости конкретной пары $\varphi(x)$. Пусть для некоторого значения h_B (либо для некоторого γ) величина $\lambda_0 > 0$. Варьируя поле h_B при заданном токе γ (либо ток γ при фиксированном h_B), можно добиться выполнения условия (2.9) с наперед заданной точностью, т. е. вычислить одну точку бифуркационной кривой, соответствующей решению $\varphi(x)$.

Если величина λ задана, то (1.3), (2.7) представляет собой замкнутую систему для функций $(\varphi(x), \psi(x))$ и одного из множества параметров p , который обозначим через ξ (соответственно, через \check{p} обозначена совокупность параметров p без ξ). Для численного решения такой нелинейной задачи на собственные значения со спектральным параметром ξ удобно применять итерационный алгоритм [2], [15], базирующийся на непрерывном аналоге метода Ньютона [17]. Полагая $\lambda = 0$, при помощи подходящего выбора начального приближения можно удовлетворить условию (2.8) при $n \geq 0$. Тем самым находим поверхность $\xi(\check{p}; \varphi)$ в пространстве \mathcal{P} , соответствующую бифуркации

порядка n решения $\varphi(x)$. Срезы этой поверхности плоскостями, соответствующими двум фиксированным параметрам из множества \check{p} , представляют собой бифуркационные кривые $\lambda_n(\xi, \eta) = 0$ на плоскости $\mathcal{P}_{\xi\eta}$ для параметра ξ и оставшегося параметра η из \check{p} .

Указанный метод непосредственного вычисления точек бифуркации распределений магнитного потока в ДК предложен в [15] и применялся для решения широкого класса физических проблем [2], [16].

Ввиду того, что при заданных h_B и γ краевая задача (1.3), как правило, имеет более чем одно устойчивое решение, критическая кривая контакта в целом строится как огибающая критических кривых различных решений. В частности, критическая кривая вида ток – магнитное поле контакта состоит из кусков таких же критических кривых (2.9), соответствующих различным вихрям с наибольшим при заданном h_B током γ .

Для непосредственного вычисления парциальных критических зависимостей (2.11) и (2.13) необходимо решать нелинейные задачи на собственные значения (1.3), (2.10) и (1.3), (2.12).

Остановимся коротко на вычислении точек пересечения кусков бифуркационных кривых. Сначала рассмотрим случай критических кривых для контакта в целом. Зафиксируем геометрические параметры l и s . Пусть (h_c, γ_c) — координаты некоторой точки пересечения C на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma}$. Каждая такая точка соответствует обращению в нуль СЗ ЗШТЛ для двух решений $\varphi^L(x)$ и $\varphi^R(x)$, бифуркационные кривые которых расположены слева (L) и справа (R) от точки C . Обозначим через $(\lambda^L, \psi^L(x))$ и $(\lambda^R, \psi^R(x))$ собственные значения и собственные функции ЗШТЛ, порожденные распределениями $\varphi^L(x)$ и $\varphi^R(x)$. Тогда при условии, что в точке C должно быть

$$\lambda^L(h_c, \gamma_c) = 0, \quad \lambda^R(h_c, \gamma_c) = 0,$$

приходим к следующей краевой задаче:

$$-A \varphi_{xx}^L + J_z(\varphi^L) + \Gamma_c = 0, \quad (2.18a)$$

$$\varphi_x^L(\pm l) = H_c, \quad (2.18b)$$

$$-A \psi_{xx}^L + Q^L(x) \psi^L = 0, \quad (2.18c)$$

$$\psi_x^L(\pm l) = 0, \quad (2.18d)$$

$$-A \varphi_{xx}^R + J_z(\varphi^R) + \Gamma_c = 0, \quad (2.18e)$$

$$\varphi_x^R(\pm l) = H_c, \quad (2.18f)$$

$$-A \psi_{xx}^R + Q^R(x) \psi^R = 0, \quad (2.18g)$$

$$\psi_x^R(\pm l) = 0, \quad (2.18h)$$

для восьми компонент функций $\varphi^L(x)$, $\psi^L(x)$, $\varphi^R(x)$ и $\psi^R(x)$, а также неизвестных параметров h_c и γ_c . Здесь положено $\Gamma_c = \gamma_c(1, 1)^T$ и $H_c = h_c(1, 1)^T$.

Волновые функции $\psi^L(x)$ и $\psi^R(x)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_{-l}^l \langle \psi^L, \psi^L \rangle dx - 1 = 0, \quad \int_{-l}^l \langle \psi^R, \psi^R \rangle dx - 1 = 0. \quad (2.19)$$

Потенциалы $Q^L(x) = \text{diag}(\cos \varphi_1^L, \cos \varphi_2^L)$, $Q^R(x) = \text{diag}(\cos \varphi_1^R, \cos \varphi_2^R)$. Для решения двухпараметрической нелинейной задачи на собственные значения (2.18), (2.19) целесообразно применить алгоритм, основанный на НАМН, выбирая подходящим образом начальные приближения.

Для вычисления координат (h_c, γ_c) точек пересечения парциальных бифуркационных кривых соответствующая двухпараметрическая спектральная задача содержит шесть неизвестных функций $\varphi^L(x)$, $u_1^L(x)$, $\varphi^R(x)$ и $u_1^R(x)$, а также неизвестные параметры h_c и γ_c

$$-A \varphi_{xx}^L + J_z(\varphi^L) + \Gamma_c = 0, \quad (2.20a)$$

$$\varphi_x^L(\pm l) = H_c, \quad (2.20b)$$

$$-a_{11} u_{1,xx}^L + \cos \varphi_1^L u_1^L = 0, \quad (2.20c)$$

$$u_{1,x}^L(\pm l) = 0, \quad (2.20d)$$

$$-A \varphi_{xx}^R + J_z(\varphi^R) + \Gamma_c = 0, \quad (2.20e)$$

$$\varphi_x^R(\pm l) = H_c, \quad (2.20f)$$

$$-a_{11} u_{1,xx}^R + \cos \varphi_1^R u_1^R = 0, \quad (2.20g)$$

$$u_{1,x}^R(\pm l) = 0. \quad (2.20h)$$

Система замыкается добавлением двух условий нормировки для парциальных волновых функций $u_1^L(x)$ и $u_1^R(x)$

$$\int_{-l}^l [u_1^L(x)]^2 dx = 1, \quad \int_{-l}^l [u_1^R(x)]^2 dx = 1. \quad (2.21)$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для численного решения рассмотренных выше нелинейных краевых задач использовался итерационный алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона (см. обзоры [17]). Возникающие на каждой итерации линеаризованные краевые задачи решались численно при помощи сплайн-коллокационной схемы [18] точности $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h .

Точность схемы проверялась при помощи метода Рунге. Проверка сходимости итераций к минимальному собственному значению ЗШТЛ производилась методом итераций подпространств [19].

В настоящей работе численный эксперимент проводился для симметричного ДК длиной $2l = 7$ при двух значениях параметра связи: $s = -0,3$ и $s = -0,5$.

Отметим прежде всего, что если пара $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ есть решение краевой задачи (1.3), то пара $\bar{\varphi} = (\varphi_2, \varphi_1)^T$ есть также решение (1.3), которое далее будем называть сопряженным с φ . Для симметричных решений $\varphi = \bar{\varphi}$.

Конкретные примеры пар распределений в двухслойном ДК с $s = -0,5$, а также влияние поля h_B на устойчивость последних демонстрируются на рис. 3–8. В частности, на рис. 3 представлены графики зависимостей $\varphi_x(x)$ для устойчивого мейсснеровского решения M в небольшой окрестности ($\mu_{10} = \mu_{20} = 0,001$) двух точек бифуркации: ($h_B = h_{c1} = 1,2$; $\gamma_{cr} \approx 0,217$) и ($h_B = h_{c2} \approx 2,03$; $\gamma_{cr} = 0$). M -решение является симметричным, т. е. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Хорошо просматривается эффект выталкивания контактом внешнего магнитного поля.

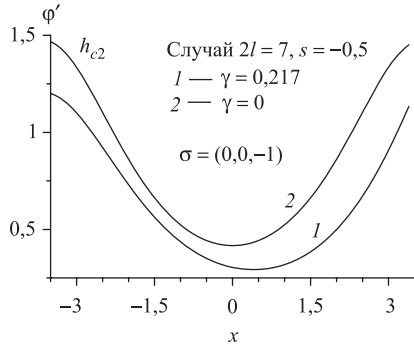


Рис. 3. Пары (M, M) в двухслойном ДК

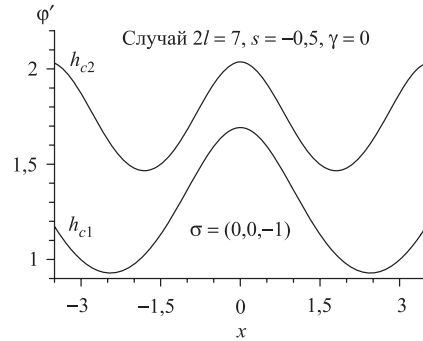


Рис. 4. Пары (Φ, Φ) в двухслойном ДК

На рис. 4 показаны «бифуркационные» зависимости $\varphi_x(x)$ для однофлюксонного распределения Φ при $\gamma_{cr} = 0$ и $\mu_{10} = \mu_{20} = 0,001$, т. е. на границах $h_B = h_{c1} \approx 1,17$ и $h_B = h_{c2} \approx 2,03$ области существования флюксона по полю h_B . В этом случае собственные магнитные поля $\varphi_{i,x}(x)$ также симметричны относительно ординаты и локализованы в окрестности центра $x = 0$ ДК.

Зависимости собственных магнитных полей $\varphi_{i,x}(x)$ несимметричных пар вида (Φ, Φ^{-1}) при $h_B = 0$ и $h_B = 1$ в отсутствие внешнего тока γ даны на рис. 5. Сплошные кривые представляют солитоны в первом (нижнем) слое, пунктирные — во втором (верхнем) слое. Отметим, что при увеличении граничного поля h_B парциальная устойчивость ухудшается из-за перераспреде-

ления собственных магнитных полей в отдельных слоях. При этом $N[\varphi_1] = 1$ и $N[\varphi_2] = -1$ для любых допустимых h_B .

На рис. 6 демонстрируются графики функций $\varphi_x(x)$, соответствующих несимметричным парам вида (Φ, M) при $h_B = 0$, $h_B = 1$ и токе $\gamma = 0$. При $h_B = 0$ деформация устойчивой M -компоненты ($\Delta\varphi_2 \approx 0,023$) от тривиального решения $\varphi_2(x) = 0$ ($\Delta\varphi_2 = 0$) при $s = 0$ обязана взаимодействию между слоями. Возрастание поля h_B приводит к ухудшению глобальной устойчивости пары. При токе $\gamma = 0$ во всей области изменения поля h_B функционал (1.4) на решениях этого вида сохраняет постоянные значения: $N[\varphi_1] = 1$, $N[\varphi_2] = 0$.

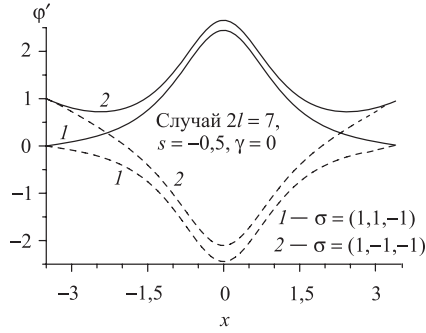


Рис. 5. Пары (Φ, Φ^{-1})

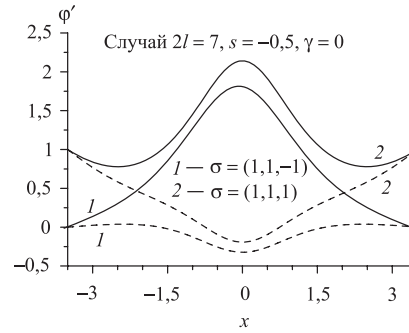


Рис. 6. Пары (Φ, M) в двухслойном ДК

Распределения, представленные на рис. 7, следует рассматривать как результат нелинейного взаимодействия неустойчивого мейсснеровского решения M ($\varphi_1(x) = \pi$ при $s = 0$, $h_B = 0$ и $\gamma = 0$) и флюксона Φ , т.е. это пары вида (M, Φ) . Для таких решений при токе $\gamma = 0$ в области допустимых полей h_B выполняются равенства $N[\varphi_1] = 1$, $N[\varphi_2] = 1$.

Распределения собственных магнитных полей пар бризеров (B, B^{-1}) при $h_B = 1,4$ приведены на рис. 8. Кривые 1 соответствуют случаю $\gamma = 0$, когда

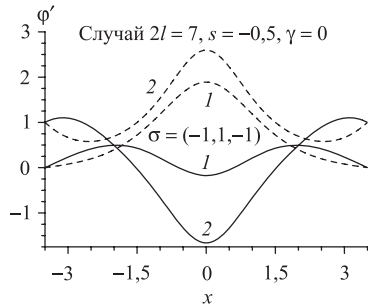


Рис. 7. Пара (\bar{M}, Φ) в двухслойном ДК

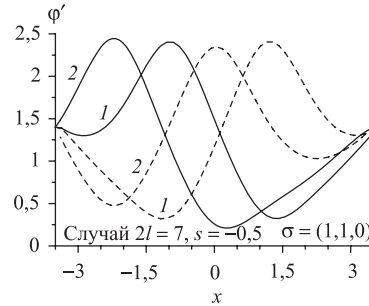


Рис. 8. Пары бризеров (B, B^{-1})

решения обладают симметрией вида $\varphi^1(x) = -\varphi^2(-x) + 2\pi k$, т.е. их производные симметричны относительно вертикальной прямой $x = 0$ (верхний индекс здесь указывает номер пары). Пара (B, B^{-1}) имеет сопряженную пару (B^{-1}, B) (на рис. 8 не показана). На таких решениях функционал (1.4) принимает дробные значения, но сумма $N[\varphi_i^1] + N[\varphi_i^2] = 2$. Кривые, отмеченные 2, вычислены для критического значения тока $\gamma = \gamma_{cr} \approx 0,14$.

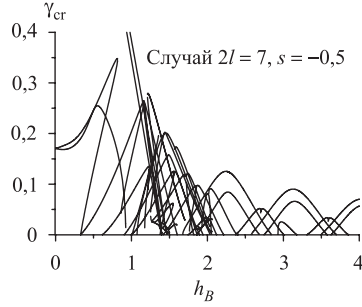


Рис. 9. Парциальные бифуркационные кривые в случае $2l = 7, s = -0,5$

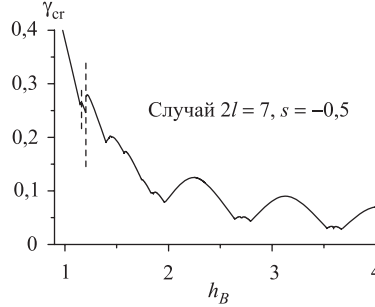


Рис. 10. Парциальная критическая кривая первого слоя ДК

Перейдем теперь к построению парциальных критических кривых вида ток – магнитное поле в двухслойном ДК. В случае симметричной матрицы $A(s)$ парциальные бифуркационные зависимости для первого и второго слоев ДК совпадают. По этой причине далее рассматриваются только парциальные зависимости для распределений в первом слое.

Пусть при фиксированном γ и некотором h_B функция $\varphi(x, h_B)$ есть решение нелинейной краевой задачи (1.3). Тогда функция $2\pi k - \varphi(x, -h_B)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, есть решение задачи (1.3) в поле $-h_B$.

Для ДК с геометрией с перекрытием, рассматриваемых в настоящей работе, ток γ не входит в краевые условия. Тогда, если $\varphi(x, \gamma)$ есть решение при некотором γ , то перемене знака тока (последнего слагаемого в (1.3а)) соответствует решение $\varphi(x, -\gamma)$.

Отсюда вытекает симметрия критических зависимостей (2.9) относительно перестановки осей $\gamma \Leftrightarrow -\gamma$ и $h_B \Leftrightarrow -h_B$ на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma}$. Указанные симметрии позволяют ограничиться рассмотрением бифуркационных зависимостей вида ток – магнитное поле только в первом квадранте.

На рис. 9 приведены бифуркационные кривые вида (2.11) для ряда распределений $\varphi_1(x)$ магнитного потока в первом слое ДК. Отметим, что разным решениям соответствуют разные знаки парциальных $\mu_{20}(h_B, \gamma)$ СЗ, т.е. сигнатура кривых на рис. 9 имеет вид $\sigma = (0, m_2, k)$, где целое $k = -1, 0$, а m_2 может принимать любое из трех возможных значений $-1, 0, 1$.

Подробное описание решений, соответствующих отдельным бифуркационным кривым, в рамках настоящей работы затруднительно ввиду их большого числа. Поэтому далее ограничимся перечислением только наиболее существенных для критической кривой слоя решений, имеющих при заданном магнитном поле h_B наибольший критический ток γ_{cr} . Куски бифуркационных кривых (2.11) таких решений образуют критическую кривую (см. рис. 10) для первого слоя в ДК. Точки непрерывного «сочленения» отдельных кусков являются решениями нелинейной двухпараметрической задачи на собственные значения (2.20), (2.21). Однако парциальная критическая кривая может иметь точки разрыва непрерывности, которые на рис. 10 (см. также рис. 11) обозначены вертикальными пунктирными прямыми. Значения внешнего магнитного поля h_B , для которых имеют место такие разрывы, а также величины скачков критического тока $\Delta\gamma_{cr} \equiv \gamma_{cr}(S_R) - \gamma_{cr}(S_L)$ существенно зависят от конкретной модели контакта, а также от выбора параметров s и l . Здесь $\gamma_{cr}(S_R)$ и $\gamma_{cr}(S_L)$ — критические токи решений справа (R) и слева (L).

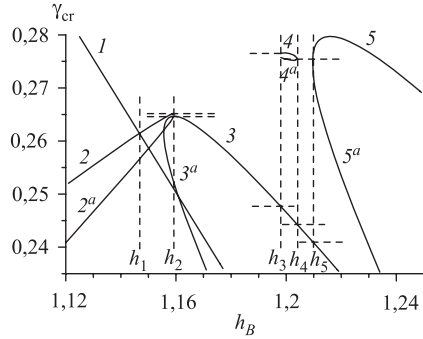


Рис. 11. Возникновение разрывов парциальной критической кривой

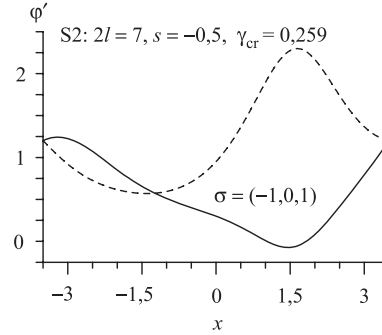


Рис. 12. Решения в окрестности точки разрыва критической кривой

Механизм образования таких точек демонстрируется на рис. 11. При $h_B < h_1$ доминирующим является вклад симметричной мейсснеровской пары 1 (см. рис. 3) с сигнатурой $\sigma = (0, 0, -1)$, которая на этом участке имеет наибольший критический ток в сравнении со всеми другими решениями задачи (1.3). При значении $h_B = h_1$ бифуркационная кривая мейсснеровского решения пересекается с бифуркационной кривой пары 2 вида (Φ, M) (см. рис. 6), сигнатура которой $\sigma = (0, 1, -1)$. В указанной точке пары 1 и 2 удовлетворяют задаче (2.20), (2.21). Таким образом, на отрезке $h_B \in [h_1, h_2]$ критическая кривая ДК представлена «куском» бифуркационной кривой (2.11), соответствующей паре 2.

При $h_B = h_2$ критическая кривая скачком переходит на ветвь, порожденную парой 3 вида (M, Φ) , для которой сигнатура $\sigma = (0, 1, -1)$ (это решение демонстрируется при $h_B = 1,2$ на рис. 12). В отличие от предыду-

шего случая, пары $\mathcal{2}$ и $\mathcal{3}$ не являются решениями задачи (2.20), (2.21), причем критический ток $\gamma_{cr}(\mathcal{2}) > \gamma_{cr}(\mathcal{3})$. Другими словами, в поле h_2 имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой (2.11) первого слоя величиной $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(\mathcal{3}) - \gamma_{cr}(\mathcal{2}) \approx -0,001$.

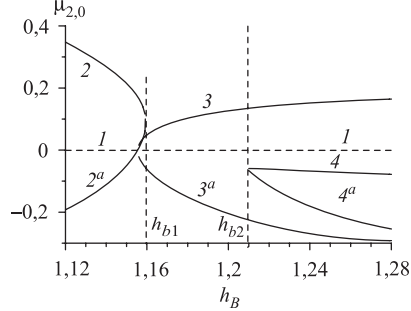


Рис. 13. Зависимости $\mu_{20}(h_B)$ для решений с рис. 11

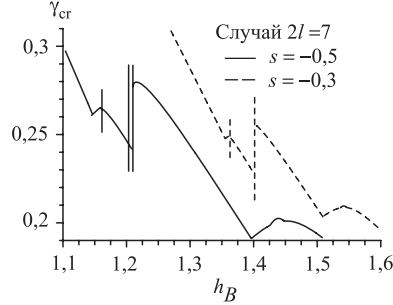


Рис. 14. Критические кривые ДК при разных значениях параметра s

Отметим, что в точке $h_B = h_2$ пара $\mathcal{2}$ скачком переходит в сопряженную ей пару $\mathcal{2}^a$ структуры (M, Φ) , $\sigma = (1, 0, -1)$. При этом (см. рис. 13) функции $\mu_{20}(h_B)$ имеют в указанной точке вертикальную касательную. Это означает, что в нуль обращаются высшие парциальные СЗ $\mu_{21}(h_B, \gamma)$, т.е. имеет место бифуркация порядка $n = 1$ компоненты $\varphi_2(x)$ пары $\mathcal{2}$.

Аналогично, при $h_B = h_3$ также имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой, обусловленный разностью максимальных критических токов решений слева $\mathcal{3}$ и справа $\mathcal{4}$. Величина скачка тока γ в этом случае на порядок выше — $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(\mathcal{4}) - \gamma_{cr}(\mathcal{3}) \approx 0,07$. На отрезке $[h_3, h_4)$ критическая кривая ДК представлена ветвью пары $\mathcal{4}$. Далее, в точке $h_B = h_4$ происходит снова скачок на ветвь бифуркационной кривой пары $\mathcal{3}$. При этом $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(\mathcal{3}) - \gamma_{cr}(\mathcal{4}) \approx -0,08$.

В точке $h_B = h_5$ происходит очередной скачок критической кривой от ветви $\mathcal{3}$ на ветвь, принадлежащую паре $\mathcal{5}$. Величина скачка $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(\mathcal{5}) - \gamma_{cr}(\mathcal{3}) \approx 0,1$.

Отметим, что при $h_B = h_5$ решение с номером $\mathcal{5}$ переходит в сопряженное ему решение $\mathcal{5}^a$. При этом (см. рис. 13) функция $\mu_{20}(h_B)$ имеет в указанной точке скачок гладкости, т.е. происходит бифуркация порядка $n = 1$ координаты $\varphi_2(x)$ пары $\mathcal{5}$.

На рис. 14 демонстрируется влияние параметра связи s на парциальную критическую кривую. Видно, что с уменьшением s критическая кривая сдвигается направо, стремясь тем самым к положению, соответствующему независимым слоям ($s = 0$). При этом скачки критической кривой имеют более простую структуру. Например, в численном эксперименте решений вида $\mathcal{4}$

(см. рис. 11) при $s = -0,3$ не обнаружено, что говорит о наличии бифуркаций решений задачи (1.3) по параметру s .

Перейдем к описанию поведения глобальной критической кривой дву-слойного симметричного ДК.

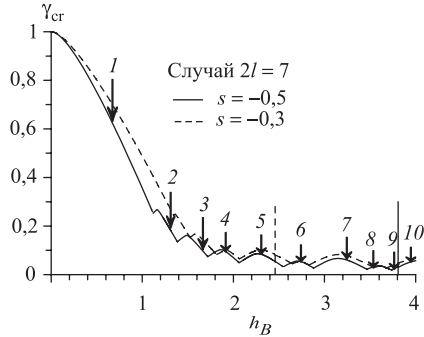


Рис. 15. Глобальные критические кривые для $s = -0,3$ и $s = -0,5$

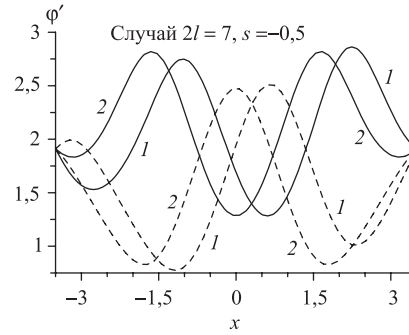


Рис. 16. Пара (Φ^2, Φ)

Сравнение глобальных критических кривых ДК для двух значений $s = -0,3$ и $s = -0,5$ дано на рис. 15. Эти кривые состоят из кусков бифуркационных кривых вида (2.9), соответствующих решениям краевой задачи (1.3) с наибольшим при каждом h_B критическим током γ_{cr} . Хорошо заметно, что с увеличением внешнего магнитного поля h_B влияние параметра связи уменьшается.

Для полноты изложения приведем примеры решений задачи (1.3) в случае $s = -0,5$, бифуркационные кривые которых участвуют при построении критической кривой ДК. Кривая, обозначенная через 1 (нумерация на рис. 15 отвечает значению $s = -0,5$), соответствует симметричной мейсснеровской паре (M, M) (см. рис. 3). Критическая кривая 2 соответствует паре (M, Φ) (см., напр., рис. 6). Пара вида (B, B^{-1}) , соответствующая кривой 3, демонстрируется на рис. 8. На рис. 16 показана пара вида (Φ^2, Φ) , которой соответствует кусок глобальной критической кривой, обозначенный на рис. 15 номером 4. При $\gamma = 0$ (кривая 1 на рис. 16) число флюксонов $N[\varphi_1] = 2$, $N[\varphi_2] = 1$. Решения, отмеченные номером 2, вычислены в небольшой окрестности ($\lambda_0 = 0,001$) точки бифуркации, где $\gamma_{cr} \approx 0,096$. Аналогично, на рис. 17 представлена пара вида (Φ^2, Φ^2) , которой отвечает участок с номером 5 на рис. 15.

Отметим хорошее качественное совпадение построенной численным путем критической кривой с экспериментальными результатами, приведенными в работе [6]. Вместе с тем отметим, что при достаточно больших значениях магнитного поля h_B глобальная критическая кривая, так же как и парциальные, может иметь точки разрыва непрерывности (см. конкретный

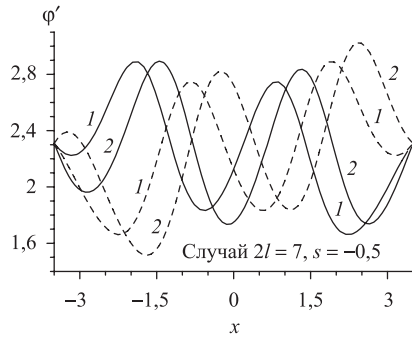


Рис. 17. Пара $\Phi^2\Phi^2$

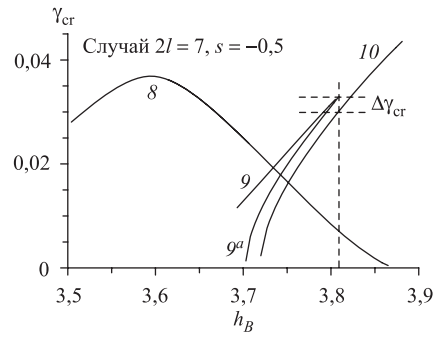


Рис. 18. Разрыв глобальной критической кривой при $s = -0,5$

пример на рис. 18). Наличие и положение таких точек на оси h_B , так же как и соответствующие значения скачков критического тока, существенно определяется моделью ДК и значениями остальных параметров. Для симметричного ДК длины $2l = 7$, рассматриваемой в настоящей работе, при $s = -0,5$ разрыв непрерывности глобальной критической кривой имеет место для $h_B \approx 3,81$, а величина скачка критического тока $\Delta\gamma_{cr} \approx 0,003$.

В случае $s = -0,3$ (см. рис. 19) точка разрыва критической кривой смещается налево ($h_B \approx 2,45$), стремясь к положению, соответствующему $s = 0$. При этом скачок тока имеет примерно такое же значение, как и в случае $s = -0,5$.

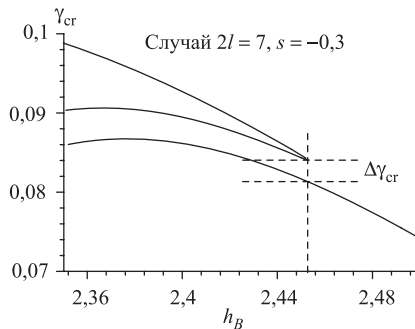


Рис. 19. Разрыв глобальной критической кривой при $s = -0,3$

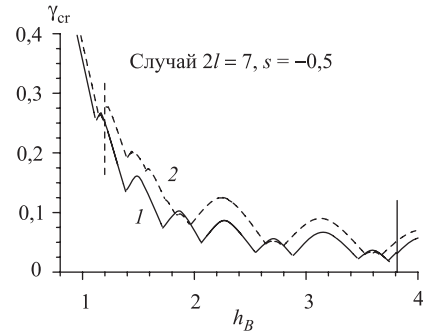


Рис. 20. Глобальная 1 и парциальная 2 критические кривые при $2l = 7, s = -0,5$

При выборе подходящей модели и параметров такие скачки можно будет обнаружить экспериментальным путем.

Парциальная и глобальная критические кривые в случае $2l = 7$ и $s = -0,5$ представлены в сравнении на рис. 20. Отметим, что некоторые из парциальных бифуркационных кривых достаточно близки к глобальным. При этом

с увеличением магнитного поля h_B разница между глобальной и парциальными бифуркационными кривыми уменьшается. Для всех рассматриваемых в настоящей работе значений параметров модели глобально-бифуркационные решения оказываются парциально-устойчивыми, т.е. для симметрического ДК сигнатура глобально-устойчивых бифуркационных решений имеет вид $\sigma = (1, 1, 0)$. Другими словами, ток, необходимый для перевода ДК в резистивный режим «как целое», как правило, меньше критического тока для отдельных контактов. Это утверждение хорошо просматривается на рис. 20.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе для моделирования устойчивости и бифуркаций конфигураций магнитного потока в двухслойном ДК применяются методы теории парциальной устойчивости. Показано, что с математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [4], [5], обусловлены наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых, положение которых зависит от выбора модели и значений параметров.

Устойчивость «как целое» (глобальная устойчивость) пар вихрей в контакте исследуется при помощи векторной задачи Штурма–Лиувилля. Демонстрируется хорошее качественное совпадение полученной численным путем глобальной критической кривой с экспериментальными результатами, приведенными в работе [6]. Численный эксперимент показывает, что глобальная критическая кривая двухслойного ДК также может иметь точки разрыва непрерывности, которые могут быть обнаружены в эксперименте.

Отметим, что методы настоящей работы легко переносятся на случай ДК с числом слоев больше двух.

Благодарности. Авторы благодарят проф. Е. П. Жидкова, проф. И. В. Пузынина и проф. Ю. М. Шукринова (ОИЯИ, Дубна), а также проф. Л. Лилову, Софийский университет «Св. Кл. Охридский», за стимулирующие дискуссии.

Работа С. Н. Димовой частично финансирована грантом № IO-03/2003 НСНИ, МОН, РБ и грантом № 160/2004 УФНИ, СУ «Св. Климент Охридский».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальперин Ю. С., Филиппов А. Т. Граничные условия решений в неоднородных переходах // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, №(4). С. 1527, English translation: Sov. Phys. JETP. 1984. V. 59. P. 894.

2. *Бояджиев Т.Л.* Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики: Дис. ... д-ра .физ.-мат. наук. Дубна, 2002.
3. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. 1957. Вып. I, №4. С. 9–16;
Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control, Boston, MA: Birkhäuser, 1998.
4. *Nevirkovets I. P., Evetts J. E., Blamire M.* // Phys. Lett. A. 1994. V. 187. P. 119;
Goldobin E., Kohlstedt H., Ustinov A. V. Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 68, No. 2. P. 250–252.
5. *Goldobin E., Ustinov A. V.* Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1999. V. 59, No. 17. P. 11532–11538.
6. *Song S. N., Auvil P. R., Ulmer M., Ketterson J. B.* Vortex structure and Josephson supercurrent in stacked double Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1996. V. 53, No. 10. P. R6018.
7. *Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В.* Вычисление бифуркаций стабильных решений в двуслойных неоднородных джозефсоновских контактах. Сообщение ОИЯИ Р5-89-173. Дубна, 1989.
8. *Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F.* Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // J. Appl. Phys. 1993. V. 73, No. 5. P. 2411–2418.
9. *Krasnov V. M., Winkler D.* Static and dynamic properties of stacked Josephson junctions: Analytic solution // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. P. 9106–9115.
10. *Licharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits, Gordon and Breach. New York, 1986. 634 pp.
11. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж. Б. Келлер и С. Антман. М.: Мир, 1974.
12. *Jackiw R.* Quantum meanings of classical field theory // Rev. Mod. Phys. V. 49, No. 3. P. 681–706.
13. *Рыбаков Ю.П., Санюк В.И.* Многомерные солитоны. М.: Изд-во РУДН, 2001.
14. *Gelfand I. M., Fomin S. V.* Calculus of Variations. Prentice-Hall, 1963.
15. *Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В.* Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе. Сообщение ОИЯИ Р11-88-409. Дубна, 1988;
Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах // Numerical Methods and Applications: Proc. of the Int. Conf. on Num. Math. and Appl., Sofia, 1988.

16. *Семерджиева Е. Г., Бояджиев Т. Л., Шукринов Ю. М.* Статичные распределения в длинных джозефсоновских контактах с экспоненциально изменяющейся длиной // Физика низких температур. 2004. Т. 30, № 6. С. 610–618.
17. *Zhidkov E. P., Makarenko G. I., Puzynin I. V.* Continuous analog of the Newton method in non-linear physical problems // Sov. J. Particles Nucl. 1973. V. 4, No. 1. P. 53;
Puzynin I. V. et al. The generalised continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. 1999. V. 30, No. 1. P. 97.
18. *Бояджиев Т. Л.* Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ Р2-2002-101. Дубна, 2002.
19. *Bathe K. J., Wilson E.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.

Получено 11 апреля 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 09.06.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 310 экз. Заказ № 54917.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/