

P11-2005-162

П. Х. Атанасова*, Т. Л. Бояджиев**, С. Н. Димова^{1,***}

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ
ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ
ДВУХСЛОЙНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

¹ Софийский университет «Св. Кл. Охридский», Болгария

* E-mail: poli@jinr.ru

** E-mail: todorlb@jinr.ru

*** E-mail: dimova@fmi.uni-sofia.bg,

Атанасова П. Х., Димова С. Н., Бояджиев Т. Л.
Численное моделирование критических зависимостей для
симметричных двухслойных джозефсоновских контактов

P11-2005-162

В настоящей работе проведено моделирование парциальных критических зависимостей вида «ток — магнитное поле» в двухслойном симметричном джозефсоновском контакте. Численный эксперимент показывает, что при ненулевом коэффициенте взаимодействия между слоями контакта на критических кривых могут иметь место скачки критических токов, соответствующих различным парам распределений магнитных потоков. Это позволяет интерпретировать математически особенности некоторых недавних экспериментальных результатов для двухслойных контактов как результат наличия точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Atanasova P. H., Dimova S. N., Boyadjiev T. L.
Numerical Modelling of the Critical Dependences in
Two-Layered Symmetric Josephson Junctions

P11-2005-162

In this work a numerical modelling of the critical current as a function of applied magnetic field is carried out in a two-layered symmetric inductively coupled Josephson stack. The numerical experiment shows, that jumps of the current, corresponding to various pairs of magnetic flux distributions can take place on the critical curves at nonzero factor of interaction between layers. It allows one to interpret mathematically features of some recent experimental results.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

За последнее время свойства многослойных (и, в частности, двухслойных) джозефсоновских контактов (далее используем сокращение ДК) исследовались рядом авторов (см., например, [1–11]). Такие структуры позволяют ставить и изучать ряд новых физических эффектов, не имеющих места для однослойных ДК, а также представляют значительный интерес для практических применений.

Одним из наиболее интересных результатов, экспериментально обнаруженных за последние годы, является эффект, называемый «эффектом синхронизации критических токов» (current locking) [4, 5]. Суть эффекта заключается в совпадении на некоторых участках парциальных критических кривых вида «ток — магнитное поле» для двухслойных ДК. Тем самым на экспериментальных кривых наблюдаются скачки критического тока, соответствующие фиксированным значениям внешнего магнитного поля.

В настоящей работе проведено численное моделирование критических кривых в рамках модели индуктивно связанных слоев ДК на основе идей теории парциальной устойчивости [12, 13]. Для этой цели переходы из сверхпроводящего в резистивный режим работы слоев контакта математически интерпретируются как бифуркации статических распределений магнитного потока при изменении параметров — приложенного магнитного поля и внешнего тока. В рамках традиционной модели одномерного длинного ДК такой подход был впервые применен в классической работе [14]. Каждому статическому распределению в конкретном слое ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля, собственные значения которой позволяют судить о парциальной устойчивости или неустойчивости распределения. При таком подходе критический ток распределения есть то значение внешнего тока, при котором соответствующее минимальное собственное значение обращается в ноль для заданных прочих параметров и, в частности, внешнего магнитного поля. Так как для заданного поля соответствующая нелинейная краевая задача модели может иметь более чем одно статическое решение, то критический ток слоя — это наибольший из критических токов распределений в слое, а критический ток структуры как целое — меньший из критических токов слоев. Парциальные критические зависимости для каждого из слоев строятся как огибающие бифуркационных кривых отдельных распределений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках модели длинных ДК, учитывающей только индуктивное взаимодействие между соседними слоями, динамика магнитного потока в ДК длины $2l$ описывается [2] смешанной задачей для системы возмущенных уравнений типа синус-Гордон

$$\phi_{tt} + \alpha \phi_t - A \phi_{xx} + J_z(\phi) + \Gamma = 0, \quad (1a)$$

$$t > 0, \quad x \in (-l, l),$$

$$\phi_x(t, \pm l) = H. \quad (1b)$$

В уравнениях (1) через t и x обозначены время и пространственная координата вдоль контакта (все используемые здесь и ниже величины безразмерны; о способах приведения к безразмерному виду см., например, работу [2], а также монографию [15]). Соответствующим нижним индексом обозначена операция дифференцирования. Величина $\phi(t, x) = (\phi_1, \phi_2)^T$ есть 2-вектор магнитных потоков в «нижнем» $\phi_1(t, x)$ и «верхнем» $\phi_2(t, x)$ слоях. Постоянная $\alpha \geq 0$ представляет собой коэффициент диссипации. Далее в настоящей работе ограничимся преимущественно рассмотрением случая симметричного двухслойного ДК, отдельные слои которого идентичны и, в частности, толщины слоев $\Delta_1 = \Delta_m = \Delta_2$ (см. рис. 1). Тогда вектор плотностей тока

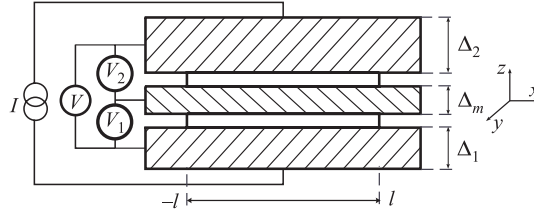


Рис. 1. Схема двухслойного ДК

Джозефсона определяется как $J_z(\phi) = (\sin \phi_1, \sin \phi_2)^T$. Вектор внешнего тока $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$, где для простоты в дальнейшем полагаем $\gamma = \text{const}$. Верхний индекс T используется для операции транспонирования. Аналогично, 2-вектор $H = h_B (1, 1)^T$, а постоянная h_B представляет собой внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси y в плоскости контакта. Квадратная симметрическая 2-матрица $A(s)$ зависит только от параметра связи $s \in (-1, 0]$

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналитическое выражение для величины s через гиперболические функции приведено, например, в работе [2].

Для дальнейших рассмотрений конкретные выражения для начальных условий в момент $t = 0$ несущественны и поэтому здесь не приводятся.

Отметим, что уравнение (1) относится к градиентному (вариационному) виду. Так как краевые условия в точках $x = \pm l$ не зависят явным образом от времени t , то полная энергия ДК (функционал Ляпунова)

$$E(t) = \int_{-l}^l \left\{ \frac{1}{2} [\phi_t^2 + \langle \phi_x, A \phi_x \rangle] + U(\phi) \right\} dx + \langle A H, \Delta \phi \rangle,$$

связанная с конкретным ограниченным решением $\phi(t, x)$, убывает во времени

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \int_{-l}^l \phi_t^2(t, x) dt \leq 0. \quad (2)$$

Угловыми скобками $\langle a, b \rangle$ здесь и ниже обозначена операция скалярного произведения 2-векторов a и b . Плотность токов $U(\phi)$ определяется через градиент $U'_\phi(\phi) = J_z(\phi) + \Gamma$, что дает $U(\phi) = 2 - \cos \phi_1 - \cos \phi_2 + \gamma (\phi_1 + \phi_2)$. Величина $\Delta \phi = (\Delta \phi_1, \Delta \phi_2)^T$ есть 2-вектор полного магнитного потока

$$\Delta \phi = \phi(t, l) - \phi(t, -l). \quad (3)$$

Из соотношения (2) вытекает, что любое нестационарное решение $\phi(t, x)$ уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому стационарному и, в частности, статическому распределению $\varphi(x) \equiv (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$.

С физической точки зрения необходимость изучения статических решений непосредственно вытекает из условий эксперимента по измерению вольт-амперных характеристик слоев и, в частности, зависимостей «критический ток — магнитное поле» [6]. Предположим, что один или оба слоя «работают» в резистивном режиме [15]. Тогда напряжения, измеряемые на слоях $V_1(t) \neq 0$ и/или $V_2(t) \neq 0$, причем по закону Ома полное напряжение $V(t)$ на структуре (см. рис. 1)

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t). \quad (4)$$

Здесь средние напряжения на отдельных слоях определяются в соответствии с соотношениями Джозефсона

$$V_i(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi_{i,t}(t, x) dx, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Если же оба слоя «работают» в джозефсоновском режиме (при заданном h_B ток через структуру меньше некоторого критического значения), то напряжения, измеряемые на слоях $V_1(t) = 0$ и $V_2(t) = 0$, что приводит к $\phi_{i,t}(t, x) = 0$.

Отметим, что в случае модели с емкостным взаимодействием между слоями (см, например, [11] и цитированную там литературу) вместо (5) следует использовать обобщенные соотношения Джозефсона.

Уравнение (1) имеет, как правило, более чем одно статическое решение. Поэтому для того, чтобы определить конечное состояние контакта, необходимо исследовать статические решения на устойчивость. В геометрии с перекрытием [15] 2-вектор (пара) статических распределений магнитного потока $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ в ДК удовлетворяет краевой задаче

$$-A \varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (6a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H. \quad (6b)$$

Отметим, что решения (6) зависят гладким образом как от физической координаты x , равно и от параметров l , s , h_B и γ , т.е., $\varphi = \varphi(x, p)$, где через $p \equiv \{l, s, h_B, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P}\mathbb{R}^4$ обозначен 4-вектор параметров модели. Далее зависимость от p выписываем только при необходимости.

Для ясности при дальнейшем изложении необходимо коротко остановиться на некоторых основных типах статических решений в линейных однослойных ДК. При коэффициенте связи $s \rightarrow 0$ аналогичные решения имеются и в двухслойных ДК.

В нулевом поле ($h_B = 0$) и при нулевом токе ($\gamma = 0$) каждое из дифференциальных уравнений в (6a) имеет множество мейснеровских (тривиальных, вакуумных) решений вида $\varphi(x) = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В частности, решение $\varphi(x) = 0$ устойчивое, а $\varphi(x) = \pi$ – неустойчивое. Далее устойчивые мейснеровские решения обозначаем коротко через M .

Более сложными являются решения, которые физически соответствуют вихревым распределениям магнитного потока в контакте. Простейшими вихревыми решениями являются флюксонное/антифлюксонное решения (ниже используются сокращенные обозначения $\Phi \equiv \Phi^1$ и Φ^{-1}), для которых в «бесконечном» контакте ($l \rightarrow \infty$) при $h_B = 0$ и $\gamma = 0$ имеются известные точные аналитические выражения

$$\Phi_{\infty}^{\pm 1} \equiv \varphi(x) = 4 \arctan \exp(\pm x) + 2k\pi. \quad (7)$$

В контактах конечной длины объекты вида (7) не являются флюксонами в строгом смысле слова, но ряд их особенностей, в частности, конечные энергия и размеры, обуславливают целесообразность и удобство использования такой терминологии.

При значениях $|h_B| \geq 0$ и $\gamma = 0$ в однослойном контакте конечной длины $2l$ могут существовать многофлюксонные распределения, для которых ниже

используются обозначения вида Φ^n . Здесь целое число $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ есть число вихрей, определяемое как функционал [17]

$$n \equiv N[\varphi](p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x, p) dx. \quad (8)$$

Для «бесконечного» контакта выражение в правой части следует понимать в смысле предельного перехода.

Так как любое решение $\varphi(x)$ задачи (1) определено с точностью до $2k\pi$, то и значение $N[\varphi]$ определено с точностью до $2k$. Произвол в выборе k можно использовать для «согласования» знака n со знаком полного магнитного потока распределения (3), т.е. с направлением магнитного поля вихря. В частности, для флюксонного решения Φ вида (7), выбирая $k = 0$, а для антифлюксонного Φ^{-1} соответственно $k = -1$, легко проверить, что $N[\Phi_{\infty}^{\pm 1}] = \pm 1$.

Для зависящих от времени решений $\phi_i(t, x)$ нестационарной задачи (1) функция $N_i[\phi_i](t)$ и среднее напряжение на слое $\bar{V}_i(t)$ в силу (4) связаны очевидным соотношением

$$\bar{V}_i(t) = \pi N_{i,t}[\phi_i](t).$$

Таким образом, независимость числа флюксонов в конкретном слое i от времени t (т.е. $N_{i,t} = 0$) эквивалентна равенству нулю среднего напряжения на слое. При этом в рамках линейной теории устойчивости ненулевое напряжение на слое вызвано бифуркацией некоторого устойчивого распределения магнитного потока.

В качестве примеров отметим, что при внешнем токе $\gamma = 0$ и любом допустимом поле h_B M -решение и n -флюксонное/антифлюксонное распределение Φ^n характеризуются соответственно значениями $N[M] = 0$ и $N[\Phi^n] = \pm n$. Другими словами, функционал (8) не зависит от параметра h_B . Для иллюстрации на рис. 2 представлены Φ -кривые при $\gamma = 0$ для трех значений внешнего поля h_B . В рассматриваемом случае геометрически сохранение величины $N[\Phi]$ означает сохранение соответствующих площадей под кривыми при изменении поля h_B , причем высота «центра» $\varphi(0) = \pi$ также не зависит от h_B . Отметим, что независимость значения $N[\varphi]$ от магнитного поля h_B имеет место для любого распределения магнитного потока во всех линейных статических моделях ДК при отсутствии внешнего тока γ либо тока, обусловленного, например, переменной геометрией контакта [16]).

В заданном поле h_B внешний ток $\gamma \neq 0$ выталкивает магнитное поле из ДК, смещая его от середины $x = 0$ направо ($\gamma > 0$) или налево ($\gamma < 0$). Этот эффект иллюстрируется на рис. 3 для Φ -распределения в поле $h_B = 1$ при

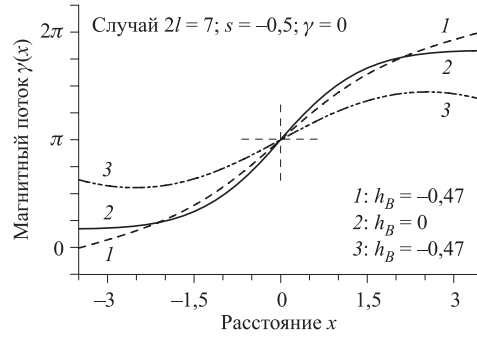


Рис. 2. Число флюксонов $N[\Phi]$ сохраняется при изменении h_B

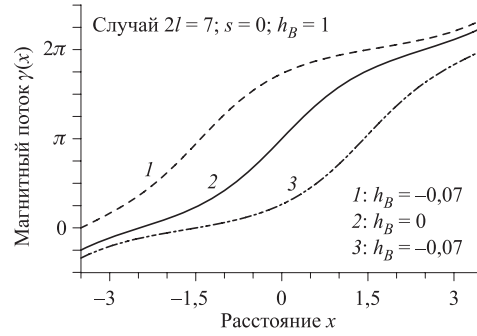


Рис. 3. Число флюксонов $N[\Phi]$ меняется при изменении γ

трех значениях параметра γ . Для распределений вида Φ^n число вихрей (8) при токе $\gamma \neq 0$ становится дробным.

При токе $\gamma = \gamma_{cr}$ некоторое первоначально устойчивое для $|\gamma| < |\gamma_{cr}|$ распределение «срывается» и переходит в неустойчивое состояние. Значение γ_{cr} будем называть критическим током распределения. В физическом эксперименте потеря устойчивости (срыв) распределения с наибольшим критическим током при заданном магнитном поле h_B соответствует наиболее вероятному переходу ДК из статического состояния с нулевым напряжением на квазичастичную ветвь вольт-амперной характеристики. Разумеется, в конкретном эксперименте возможна также реализация менее вероятных (менее энергетически выгодных) распределений, что существенно использовалось, например, в работе [18]. Другими словами, критический ток контакта — это максимальный ток, при котором контакт остается сверхпроводящим. С математической же точки зрения срыв некоторого распределения означает, что происходит бифуркация конкретного решения задачи (6) при изменении параметра γ [14].

При некоторых значениях параметров h_B и γ в ДК могут образовываться более сложные вихревые конфигурации, которые можно рассматривать как результат нелинейного взаимодействия цепочек флюксонов и/или антифлюксонов. Такие решения, которые обозначаем через $\Phi^n \Phi^m$, $|n| + |m| > 0$, могут иметь дробное число вихрей (8) и при заданном h_B существуют парами, соответствующими перестановке «степеней» $n \leftrightarrow m$. При этом сумма чисел вихрей пары — целое число [17]. Простейшим примером являются «бризерные» решения вида $B \equiv B^1$ и B^{-1} (см. ниже), для которых при токе $\gamma = 0$ выполнено $N[B^{\pm 1}] = \pm 1$.

В двухслойном ДК при $s < 0$ распределения магнитного потока в отдельных слоях деформируются из-за взаимодействия между слоями, образуя при этом связанные пары. При одних и тех же значениях параметров h_B и γ распределения в отдельных слоях, а также соответствующая им пара распределений могут быть устойчивыми либо неустойчивыми. В физическом эксперименте переход к неустойчивости некоторого парциального распределения при достижении критического тока $\gamma = \gamma_{cr}$ выражается в возможном (с вероятностью, зависящей от энергии распределения) скачкообразном возникновении разности потенциалов на одном из слоев, а следовательно, в силу закона Ома (4), и на контакте в целом (см. рис. 1). В многослойных ДК ситуация существенно усложняется тем, что возможны эксперименты по определению критического тока для отдельных слоев, групп слоев, а также структуры в целом.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Вариационный принцип. Уравнение (6a) и краевые условия (6b) могут рассматриваться как необходимые условия экстремума функционала полной энергии контакта

$$F[\varphi] = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} \langle \varphi_x, A \varphi_x \rangle + U(\varphi) \right] dx - \langle AH, \Delta \varphi \rangle. \quad (9)$$

Область определения функционала (9) есть множество всех гладких на отрезке $[-l, l]$ 2-вектор-функций $\varphi(x)$, концы которых лежат на вертикальных прямых $x = \pm l$. Тогда нетрудно проверить, что (6a) представляет собой уравнение Эйлера–Лагранжа для (9), а краевые условия (6b) вытекают из условия Вейерштрасса–Эрдмана [19].

При дальнейших рассмотрениях удобно переписать полную энергию (9) в виде суммы

$$F[\varphi] = F_1 + F_2 + F_{12}. \quad (10)$$

Здесь через F_i обозначены энергии невзаимодействующих слоев:

$$F_i[\varphi_i] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \varphi_{i,x}^2 + 1 - \cos \varphi_i + \gamma \varphi_i \right) dx - h_B \Delta \varphi_i,$$

а энергия связи F_{12} вычисляется как

$$F_{12}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{s}{1-s^2} \int_{-l}^l \left[\frac{s}{2} (\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{2,x}^2) - \varphi_{1,x} \varphi_{2,x} \right] dx + \frac{s}{1+s} h_B (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2). \quad (11)$$

При теоретическом рассмотрении изучение устойчивости распределений магнитного потока в однослойном (единичном) ДК сводится [14] к нахождению первых нескольких собственных значений (СЗ) некоторой задачи Штурма–Лиувилля (ЗШТЛ) с потенциалом, определяемым конкретным распределением. В таком подходе устойчивость некоторого распределения эквивалентна положительной определенности второй вариации функционала энергии. Применение аналогичной идеи к широкому классу задач механики и физики имеется, например, в работах [20–23].

Парциальная устойчивость распределений в слоях ДК. Для анализа устойчивости распределений магнитного потока в i -м слое двухслойного ДК необходимо в соответствии с теорией парциальной устойчивости (устойчивости по части переменных) [13] рассмотреть экстремум второй вариации функционала (10) при фиксированном распределении в соседнем слое. Предполагается, что пара $\varphi(x)$ является решением нелинейной краевой задачи (6). При этом изучение характера экстремума функционала (10) в точке $\varphi_i(x)$ эквивалентно изучению характера экстремума суммы $F_i + F_{12}$. Для этой цели рассмотрим зависящее от реального параметра ϵ семейство возмущений $\varphi_i(x) + \epsilon u_i(x)$ состояния $\varphi_i(x)$ в i -м слое контакта. Отсюда обычным образом [19] приходим к регулярной ЗШТЛ

$$-a_{ii} u_{i,xx} + q_i(x) u_i = \mu_i u_i, \quad (11a)$$

$$u_{i,x}(\pm l) = 0, \quad (11b)$$

$$\int_{-l}^l u_i^2(x) dx - 1 = 0, \quad (11c)$$

потенциал которой $q_i(x) = \cos \varphi_i(x)$ определяется через решение $\varphi_i(x)$. Далее (11) будем называть парциальной ЗШТЛ для i -го слоя.

На конечном отрезке $[-l, l]$ задача (11) имеет ограниченный снизу дискретный спектр [19]

$$-1 \leq \mu_{i \min} \equiv \mu_{i0} < \mu_{i1} < \mu_{i2} < \dots < \mu_{im} < \dots$$

При этом каждому собственному значению μ_{im} отвечает единственная собственная функция (СФ) $u_{im}(x)$, для которой выполнено условие нормировки (11с). Число нулей $u_{im}(x)$ на отрезке $(-l, l)$ равно m . В частности, СФ $u_{i0}(x)$, соответствующая минимальному СЗ μ_{i0} , не имеет нулей при $x \in (-l, l)$.

Так как потенциал $q_i(x)$ определяется через решения краевой задачи (6), то собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (11) также будут гладкими функциями этих параметров, т. е., $\mu_{im} = \mu_{im}(p)$, $u_{im} = u_{im}(x, p)$.

Будем говорить, что имеет место бифуркация порядка $m \geq 0$ распределения $\varphi_i(x)$, если СЗ с номером m соответствующей ЗШТЛ (11) удовлетворяет условию

$$\mu_{im}(p) = 0. \quad (12)$$

Бифуркация минимального порядка $m = 0$ соответствует бифуркации устойчивого [21] статического распределения $\varphi_i(x)$ в неустойчивое, и наоборот. При этом (11а) представляет собой уравнение Якоби [19] для функционала $F_i + F_{12}$. Для устойчивых решений выполняется $\mu_{i0}(p) > 0$ и, следовательно, функционал $\delta^2(F_i + F_{12})$ положительно определен.

Таким образом, по спектру ЗШТЛ (11) можно судить об устойчивости $\varphi_i(x)$ в линейном приближении. Поэтому при $\mu_{i0} > 0$ целесообразно называть решение $\varphi_i(x)$ парциально устойчивым. Если же $\mu_{i0} < 0$, то решение $\varphi_i(x)$ будем называть парциально неустойчивым. При $m > 0$ имеет место бифуркация парциально неустойчивого решения задачи (6) в некоторое другое парциально неустойчивое решение.

В дальнейшем будем считать, что длина $2l$ контакта и параметр связи s фиксированы (бифуркации вихрей в джозефсоновском контакте при варьировании l изучались в работах [16], [24]). Уравнение

$$\mu_{i0}(h_B, \gamma) = 0 \quad (13)$$

определяет в неявном виде бифуркационную кривую для распределения $\varphi_i(x)$ на параметрической плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma} \equiv \{h_B, \gamma\} \in \mathbb{R}^2$. Для заданного поля h_B значение $\gamma = \gamma_{\text{кр}}$, удовлетворяющее (13), будем называть критическим током для соответствующего распределения магнитного потока. Наибольший среди критических токов устойчивых распределений, существующих при заданном h_B , есть критический ток слоя. В соответствии с формулой (4) критический ток двухслойного ДК есть меньший из критических токов слоев.

Отметим, что в однослойных ДК бифуркации порядка $n \geq 1$ представляют собой главным образом математический интерес, что обусловлено малым временем жизни [14] неустойчивых распределений. В двухслойных ДК, как будет продемонстрировано ниже, благодаря взаимодействию между слоями парциальные бифуркации высших порядков магнитных потоков могут играть существенную роль (см. ниже).

Рассмотрим важный частный случай. Будем говорить, что решение $\varphi(x)$ уравнения (6а) симметрично [6] (пара $\varphi(x)$ симметрична), если выполнено $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Примеры симметричных пар решений представлены ниже. Для симметричных распределений магнитного потока краевая задача (6) существенно упрощается (для удобства индекс координаты i опускается)

$$\begin{aligned} -a \varphi_{xx} + \sin \varphi + \gamma &= 0, \\ \varphi_x(\pm l) &= h_B. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент $a = a_{11} + a_{12} = 1/(1 + s)$, $a \in [1, \infty)$, причем $a \geq a_{ii}$.

Алгоритмы вычисления точек бифуркации. Для вычисления точек бифуркации решений задачи (6), следуя [25], рассмотрим уравнения (6), (11) в виде единой системы, общее решение которой зависит от пяти параметров p и μ_i . Для вычисления некоторого частного решения необходимо зафиксировать четыре из них, тогда пятый определяется как решение системы.

В зависимости от того, какие из параметров считаются фиксированными, следует рассматривать два класса задач.

В простейшем случае, когда заданы все координаты вектора p , задача расщепляется на независимые подсистемы (6) и (11). При этом искомым является СЗ μ_i , что соответствует проверке парциальной устойчивости координаты $\varphi_i(x)$ уже вычисленной пары $\varphi(x)$. Пусть для некоторого h_B (либо для некоторого γ) величина $\mu_i > 0$. Варьируя поле h_B при заданном токе γ (либо ток γ при фиксированном h_B), можно добиться выполнения условия (13) с наперед заданной точностью, т. е. вычислить одну точку бифуркационной кривой, соответствующей решению $\varphi_i(x)$.

Если величина μ_i задана, то (6), (11) представляет собой замкнутую систему для функций $(\varphi(x), u_i(x))$ и одного из множества параметров p , который обозначим через ξ (соответственно через \check{p} обозначена совокупность параметров p без ξ). Для численного решения такой нелинейной задачи на собственные значения со спектральным параметром ξ удобно применять итерационный алгоритм [17], [25], базирующийся на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) [26]. Полагая $\mu_i = 0$, при помощи подходящего выбора начального приближения можно удовлетворить условию (12) при $m \geq 0$. Тем самым находим поверхность $\xi(\check{p}; \varphi)$ в пространстве \mathcal{P} , соответствующую бифуркации порядка m решения $\varphi_i(x)$. Срезы этой поверхности плоскостями, соответствующими двум фиксированным параметрам из множества \check{p} ,

представляют собой бифуркационные кривые $\mu_{im}(\xi, \eta) = 0$ на плоскости $\mathcal{P}_{\xi\eta}$ для оставшегося параметра η из \tilde{p} и параметра ξ .

Указанный метод непосредственного вычисления точек бифуркации распределений магнитного потока в одномерных длинных ДК предложен в работах [25] и применялся для решения широкого класса физических проблем [17].

Ввиду того, что при заданных h_B и γ краевая задача (6), как правило, имеет более чем одно устойчивое решение, парциальная критическая кривая для i -го слоя контакта строится как огибающая бифуркационных кривых различных решений в этом же слое. В частности, парциальная критическая кривая вида «ток — магнитное поле» состоит из кусков таких же критических кривых (13), соответствующих различным вихрям с наибольшим при заданном h_B током γ .

Остановимся коротко на вычислении точек пересечения кусков парциальных бифуркационных кривых для i -го слоя. Зафиксируем геометрические параметры l и s . Пусть (h_c, γ_c) — координаты некоторой точки пересечения C на плоскости $\mathcal{P}_{\langle\gamma\rangle}$. Каждая такая точка соответствует обращению в ноль СЗ ЗШТЛ (11) для двух решений $\varphi^L(x)$ и $\varphi^R(x)$, бифуркационные кривые которых расположены слева (L) и справа (R) от точки C . Обозначим через $(\mu_i^L, u_i^L(x))$ и $(\mu_i^R, u_i^R(x))$ собственные значения и собственные функции парциальных ЗШТЛ вида (11), порожденных распределениями $\varphi_i^L(x)$ и $\varphi_i^R(x)$. Тогда при условии, что в точке C должно быть

$$\mu_i^L(h_c, \gamma_c) = 0, \quad \mu_i^R(h_c, \gamma_c) = 0,$$

приходим к следующей краевой задаче

$$-A \varphi_{xx}^L + J_z(\varphi^L) + \Gamma_c = 0, \quad (15a)$$

$$\varphi_x^L(\pm l) = H_c, \quad (15b)$$

$$-a_{ii} u_{i,xx}^L + \cos \varphi_i^L u_i^L = 0, \quad (15c)$$

$$u_{i,x}^L(\pm l) = 0, \quad (15d)$$

$$-A \varphi_{xx}^R + J_z(\varphi^R) + \Gamma_c = 0, \quad (15e)$$

$$\varphi_x^R(\pm l) = H_c, \quad (15f)$$

$$-a_{ii} u_{i,xx}^R + \cos \varphi_i^R u_i^R = 0, \quad (15g)$$

$$u_{i,x}^R(\pm l) = 0, \quad (15h)$$

где 2-векторы $H_c = h_c(1, 1)^T$ и $\Gamma_c = \gamma_c(1, 1)^T$. Система (15) содержит шесть неизвестных функций $(\varphi^L(x), u_i^L(x))$, $(\varphi^R(x), u_i^R(x))$, а также два неизвестных параметра — поле h_c и ток γ_c . Для замыкания задачи добавляем

два условия нормировки парциальных волновых функций $u_i^L(x)$ и $u_i^R(x)$, например

$$\int_{-l}^l [u_i^L(x)]^2 dx = 1, \quad \int_{-l}^l [u_i^R(x)]^2 dx = 1. \quad (16)$$

Для решения двухпараметрической нелинейной задачи на собственные значения (15), (16) целесообразно применить алгоритм, основанный на НАМН, выбирая подходящим образом начальные приближения.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для численного решения рассмотренных выше нелинейных краевых задач использовался итерационный алгоритм, основанный на НАМН. Возникающие на каждой итерации линеаризованные краевые задачи решались численно при помощи метода конечных элементов (МКЭ) на основе соответствующей формы Галеркина [27].

Дискретизация при помощи МКЭ использовалась также при решении задач Штурма–Лиувилля, возникающих при проверке устойчивости решений. Соответствующие алгебраические задачи на собственные значения для матричных пучков решались методом итераций подпространств [28].

Рассмотрим в качестве примера построение разностной схемы для задачи Штурма–Лиувилля. Для этой цели запишем (11) в следующем общем виде:

$$-a u_{xx} + q(x)u = \mu u, \quad (17a)$$

$$u_x(\pm l) = 0, \quad (17b)$$

$$\int_{-l}^l u^2(x) dx - 1 = 0. \quad (17b)$$

Умножим скалярно уравнение (17a) на пробную функцию $v(x)$:

$$v(x) \in H^1(-l, l) = \{v : v, v_x \in L^2(-l, l)\}$$

и проинтегрируем по частям с использованием условий (17b):

$$\int_{-l}^l [au_x v_x + q(x)uv] dx = \mu \int_{-l}^l uv(x) dx, \quad \forall v \in H^1.$$

Здесь и ниже через L^2 и H^1 обозначены соответствующие функциональные пространства [29].

Для дискретизации интегрального тождества используем изопараметрические квадратичные конечные элементы.

Пусть $\Pi = \{-l = x_1 < x_2 < \dots < x_n = l\}$, $x_{i+1} - x_i = h_i \leq h$ — разбиение интервала $[-l, l]$ на конечные элементы $e_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Пусть, далее, $S^h = \{v^h(x), v^h(x) \in C[-l, l], v^h(x)|_{e_i} \in P_2, \}$ — конечномерное пространство пробных функций, $S^h \subset H^1$, P_2 — множество полиномов второй степени. В пространстве $\mathbb{R} \times S^h$ ищем такую пару $\{\mu^h, u^h\}$, что

$$\int_{-l}^l [au_x^h v_x^h + q(x)u^h v^h] dx = \mu^h \int_{-l}^l u^h v^h dx,$$

где $\forall v^h \in S^h$.

Преобразуем элемент $e_i = [x_i, x_{i+1}]$ в стандартный элемент $E = [-1; 1]$ при помощи преобразования $x = x_i + (\theta + 1)(x_{i+1} - x_i)/2$. Здесь параметр $\theta \in [-1, 1]$.

Обозначим через $\psi(\theta) = (\psi_1(\theta), \psi_2(\theta), \psi_3(\theta))^T$ вектор квадратичных функций формы стандартного элемента E с координатами

$$\psi_1(\theta) = \theta(\theta - 1)/2, \quad \psi_2(\theta) = 1 - \theta^2, \quad \psi_3(\theta) = \theta(\theta + 1)/2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{e_i}^h(x(\theta)) &= \psi(\theta)v_{e_i}, & u_{e_i}^h(x(\theta)) &= \psi(\theta)u_{e_i}, \\ v_{x,e_i}^h(x(\theta)) &= \psi'(\theta)v_{e_i}, & u_{x,e_i}^h(x(\theta)) &= \psi'(\theta)u_{e_i}, \end{aligned}$$

где $v_{e_i} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $u_{e_i} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — 3-векторы значений функций u^h и v^h в узлах элемента e_i , а штрихом обозначено дифференцирование по локальной переменной θ .

В этих обозначениях для левой части интегрального тождества получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l [au_x^h v_x^h + q(x)u^h v^h] dx = \\ &= \sum_{e_i} \int_{e_i} [a(v_{x,e_i}^h)^T (u_{x,e_i}^h) + q(x)(v_{e_i}^h)^T (u_{e_i}^h)] dx = \\ &= \sum_{e_i} \left[v_{e_i}^T |J|^{-1} a \int_{-1}^1 [\psi']^T [\psi'] ds u_{e_i} + v_{e_i}^T |J| \int_{-1}^1 q(x(\theta)) \psi^T \psi ds u_{e_i} \right] = \\ &= \sum_{e_i} [v_{e_i}^T K_{e_i}^1 u_{e_i} + v_{e_i}^T K_{e_i}^0 u_{e_i}] = \sum_{e_i} [v_{e_i}^T (K_{e_i}^1 + K_{e_i}^0) u_{e_i}] = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T K_{e_i} u_{e_i} = V^T K U^h, \end{aligned}$$

где $|J| = (x_{i+1} - x_i)/2$ — якобиан преобразования, матрица $K = K^1 + K^0 = [k_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, 2N-1$ есть глобальная матрица жесткости [28], а

$U^h = (U_1, U_2, \dots, U_{2N-1})^T$ — глобальный вектор значений функции $u^h(x)$ в узлах конечноэлементной сетки.

Аналогично для правой части интегрального тождества имеем

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l u^h v^h dx &= \sum_{e_i} \int_{(e_i)} (v_{e_i}^h)^T (u_{e_i}^h) dx = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T |J| \int_{-1}^1 \psi^T \psi ds u_{e_i} = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T M_{e_i} u_{e_i} = V^T M U^h, \end{aligned}$$

где M — глобальная матрица массы [28].

Таким образом, в результате приходим к алгебраической задаче на собственные значения

$$K U^h = \mu^h M U^h \quad (18)$$

для матричного пучка с симметричными матрицами K и M .

При численной реализации хранятся и используются только верхние профили этих матриц в виде *sky-line* [28].

Задача (18) решается методом итераций подпространств [28].

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численный эксперимент проводился для ДК длиной $2l = 7$ при двух значениях параметра связи: $s = -0,3$ и $s = -0,5$.

Построение критических кривых проводили варьированием некоторого «бифуркационного» решения задачи (6) по одному из параметров h_B или γ , сохраняя при этом, например, $\mu_1 = 10^{-3}$. Для этой цели применялись алгоритмы продолжения по параметру, аналогичные изложенным в работах [30].

Отметим прежде всего, что если пара $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ есть решение краевой задачи (6), то пара $\bar{\varphi} = (\varphi_2, \varphi_1)^T$ есть также решение (6). Для симметричных решений $\varphi = \bar{\varphi}$.

Конкретные примеры пар распределений в двухслойном ДК с $s = -0,5$, а также влияние поля h_B на устойчивость последних демонстрируются на рис. 4–9, 13. В частности, на рис. 4 представлены графики зависимостей $\varphi_x(x)$ для устойчивого мейснеровского решения M в небольшой окрестности ($\mu_{10} = \mu_{20} = 10^{-3}$) двух точек бифуркации: ($h_B = h_{c1} = 1,2$; $\gamma_{cr} \approx 0,217$) и ($h_B = h_{c2} \approx 2,03$; $\gamma_{cr} = 0$). M -решение является симметричным, т. е. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Собственное магнитное поле (производные $\varphi_x(x)$) таких распределений локализовано в окрестности границ слоев. С физической точки зрения последнее соответствует эффекту Мейснера выталкивания контактом (экранирования) внешнего магнитного поля [15].

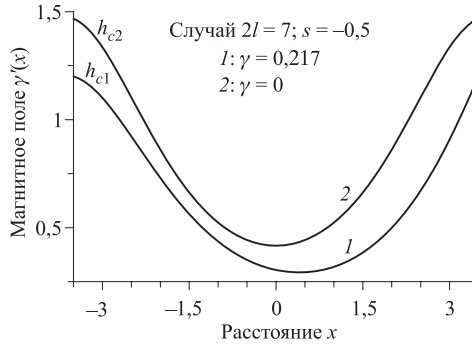


Рис. 4. Пары (M, M) в двухслойном ДК

На рис. 5 показаны «бифуркационные» зависимости $\varphi_x(x)$ для однофлюксонного распределения Φ при $\gamma_{cr} = 0$ и $\mu_{10} = \mu_{20} = 10^{-3}$, т.е. на границах $h_B = h_{c1} \approx 1,17$ и $h_B = h_{c2} \approx 2,03$ области существования флюксона по полю h_B . В этом случае собственные магнитные поля $\varphi_{i,x}(x)$ также симметричны относительно ординаты и локализованы в окрестности центра $x = 0$ ДК.

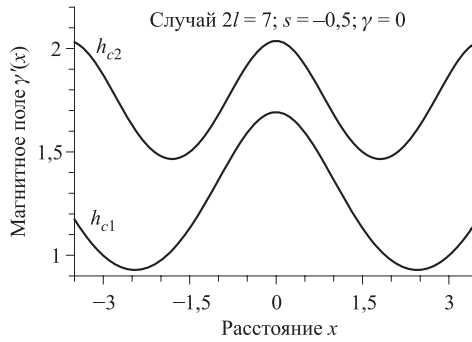


Рис. 5. Пары (Φ, Φ) в двухслойном ДК

Зависимости собственных магнитных полей $\varphi_{i,x}(x)$ несимметричных пар вида (Φ, Φ^{-1}) при $h_B = 0$ и $h_B = 1$ в отсутствие внешнего тока γ даны на рис. 6. Сплошные кривые представляют солитоны в первом (нижнем) слое, пунктирные — во втором (верхнем) слое. Отметим, что при увеличении граничного поля h_B частичная устойчивость ухудшается из-за перераспределения собственных магнитных полей в отдельных слоях. При этом $N[\varphi_1] = 1$ и $N[\varphi_2] = -1$ для любых допустимых h_B .

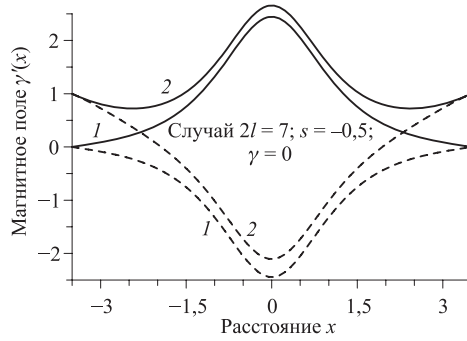


Рис. 6. Пары (Φ, Φ^{-1})

На рис.7 демонстрируются графики функций $\varphi_x(x)$, соответствующих несимметричным парам вида (Φ, M) при $h_B = 0$, $h_B = 1$ и токе $\gamma = 0$. При $h_B = 0$ деформация устойчивой M -компоненты ($\Delta\varphi_2 \approx 0,023$) от три-

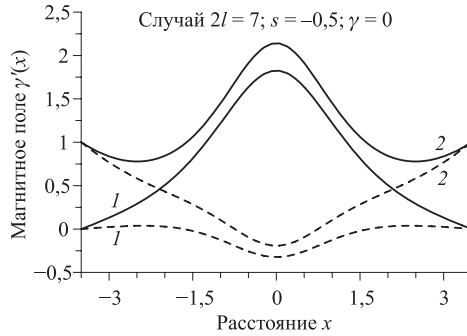


Рис. 7. Пары (Φ, M) в двухслойном ДК

виального решения $\varphi_2(x) = 0$ ($\Delta\varphi_2 = 0$) при $s = 0$ обязана взаимодействию между слоями. При токе $\gamma = 0$ во всей области изменения поля h_B функционал (8) на решениях этого вида сохраняет постоянные значения: $N[\varphi_1] = 1$, $N[\varphi_2] = 0$.

Распределения, представленные на рис. 8, следует рассматривать как результат нелинейного взаимодействия неустойчивого мейснеровского решения \bar{M} ($\varphi_1(x) = \pi$ при $s = 0$, $h_B = 0$ и $\gamma = 0$) и флюксона Φ , т. е. это пары вида (\bar{M}, Φ) . Для таких решений при токе $\gamma = 0$ в области допустимых полей h_B выполняются равенства $N[\varphi_1] = 1$, $N[\varphi_2] = 1$.

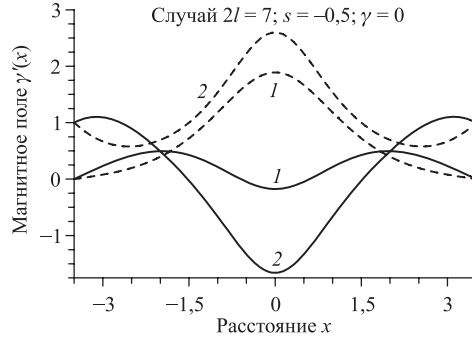


Рис. 8. Пара (\bar{M}, Φ) в двухслойном ДК

Распределения собственных магнитных полей пар вида (B, B^{-1}) при $h_B = 1,4$ приведены на рис. 9. Кривые 1 соответствуют случаю $\gamma = 0$, когда

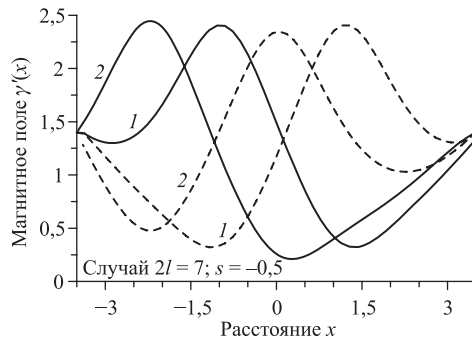


Рис. 9. Пары (B, B^{-1})

решения обладают симметрией вида $\varphi^1(x) = -\varphi^2(-x) + 2\pi k$, т.е. их производные симметричны относительно вертикальной прямой $x = 0$ (верхний индекс здесь указывает номер пары). Кроме 1 имеется также сопряженная пара (B^{-1}, B) . На таких решениях функционал (8) принимает дробные значения, но сумма $N[\varphi_i^1] + N[\varphi_i^2] = 2$. Кривые, отмеченные номером 2, вычислены для критического значения тока $\gamma = \gamma_{cr} \approx 0,14$.

Перейдем теперь к построению парциальных критических кривых вида «ток — магнитное поле» в двухслойном ДК.

В случае симметричной матрицы $A(s)$ парциальные бифуркационные зависимости для первого и второго слоев ДК совпадают. По этой причине далее рассматриваются только парциальные зависимости для распределений в первом слое.

Пусть при фиксированном γ и некотором h_B функция $\varphi(x, h_B)$ есть решение (6). Тогда функция $2\pi k - \varphi(x, -h_B)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ также есть решение в поле $-h_B$.

Для ДК в геометрии с перекрытием, рассматриваемых в настоящей работе, ток γ не входит в краевые условия. Тогда, если $\varphi(x, \gamma)$ есть решение при некотором γ , то перемене знака тока (последнего слагаемого в (6a)) соответствует решение $\varphi(x, -\gamma)$.

Отсюда вытекает симметрия критических зависимостей относительно перестановки осей $\gamma \Leftrightarrow -\gamma$ и $h_B \Leftrightarrow -h_B$ на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma}$. Указанные симметрии позволяют ограничиться рассмотрением бифуркационных зависимостей вида «ток — магнитное поле» только в первом квадранте.

На рис. 10 приведены некоторые бифуркационные кривые вида (13) для ряда распределений $\varphi_1(x)$ магнитного потока в первом слое ДК. Отметим, что разным решениям соответствуют разные знаки парциальных $\mu_{20}(h_B, \gamma)$ СЗ.

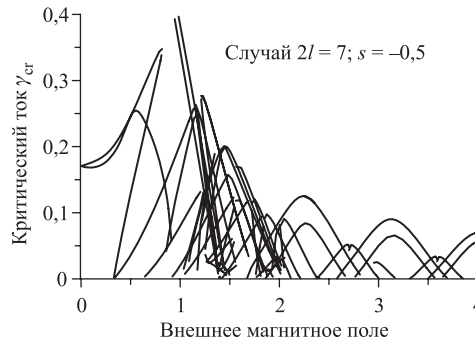


Рис. 10. Парциальные бифуркационные кривые в случае $2l = 7$, $s = -0,5$

Подробное описание решений, соответствующих отдельным бифуркационным кривым, в рамках настоящей работы затруднительно ввиду их большого числа. Поэтому далее ограничимся перечислением только наиболее существенных для критической кривой слоя решений, имеющих при заданном магнитном поле h_B наибольший критический ток γ_{cr} . Куски бифуркационных кривых (13) таких решений образуют критическую кривую (см. рис. 11) для первого слоя в ДК. Точки непрерывного «сочленения» отдельных кусков являются решениями нелинейной двухпараметрической задачи на собственные значения (15), (16). Однако численный эксперимент показывает, что парциальная критическая кривая может иметь точки разрыва непрерывности, которые на рис. 11 (см. также рис. 12) обозначены вертикальными пунктирными прямыми. Значения внешнего магнитного поля h_B , для которых

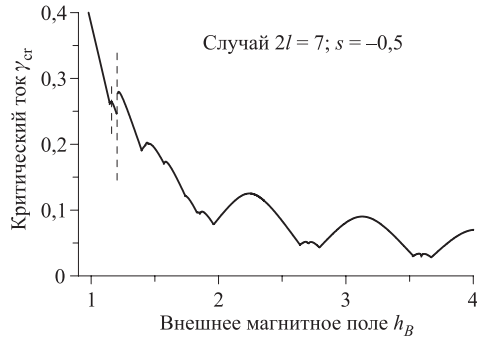


Рис. 11. Парциальная критическая кривая первого слоя ДК

имеют место такие разрывы, а также величины скачков критического тока $\Delta\gamma_{cr} \equiv \gamma_{cr}(S_R) - \gamma_{cr}(S_L)$ существенно зависят от конкретной модели контакта и от выбора параметров s и l . Здесь $\gamma_{cr}(S_R)$ и $\gamma_{cr}(S_L)$ — критические токи решений справа (R) и слева (L) от точки разрыва.

Механизм образования таких точек демонстрируется на рис. 12. При $h_B < h_1$ доминирующим является вклад симметричной мейснеровской пары 1 (см. рис. 4), которая на этом участке имеет наибольший критический ток в сравнении со всеми другими решениями задачи (6). При значении $h_B = h_1$

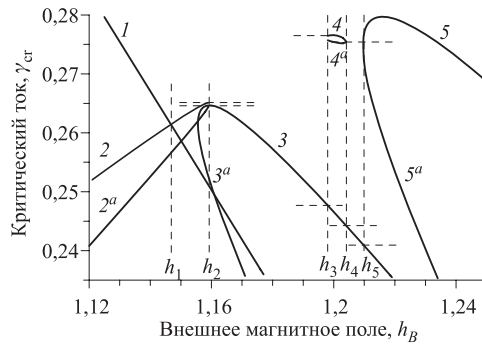


Рис. 12. Возникновение разрывов парциальной критической кривой

бифуркационная кривая мейснеровского решения пересекается с бифуркационной кривой пары 2 вида (Φ, M) (см. рис. 7). В указанной точке пары 1 и 2 удовлетворяют задаче (15), (16). Таким образом, на отрезке $h_B \in [h_1, h_2)$ критическая кривая ДК представлена «куском» бифуркационной кривой (13), соответствующей паре 2.

При $h_B = h_2$ критическая кривая скачком переходит на ветвь, порожденной парой 3 вида (M, Φ) (это решение демонстрируется при $h_B = 1,2$ на рис. 13). В отличие от предыдущего случая, пары 2 и 3 не являются ре-

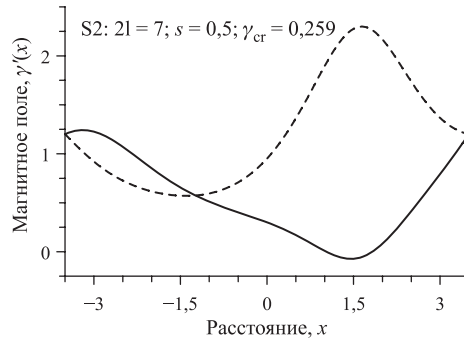


Рис. 13. Решения в окрестности точки разрыва критической кривой

шениями задачи (15), (16), причем критический ток $\gamma_{cr}(2) > \gamma_{cr}(3)$. Другими словами, в поле h_2 имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой (13) первого слоя величиной $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(3) - \gamma_{cr}(2) \approx -0,001$.

Отметим, что в точке $h_B = h_2$ пара 2 переходит в пару 2^a структуры (M, Φ). При этом (см. рис. 14), функции $\mu_{20}(h_B)$ имеют в указанной точке

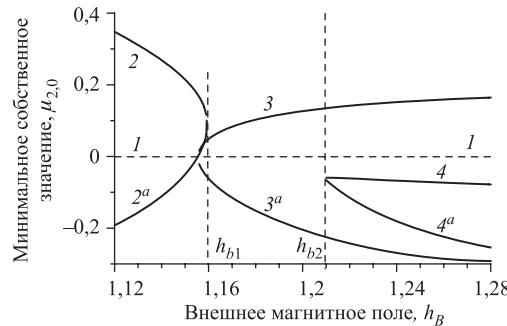


Рис. 14. Зависимости $\mu_{20}(h_B)$ для решений, показанных на рис. 12

вертикальную касательную. Это означает, что в ноль обращаются высшие парциальные СЗ $\mu_{21}(h_B, \gamma)$, т. е. имеет место бифуркация порядка $m = 1$ компоненты $\varphi_2(x)$ пары 2.

Аналогично, при $h_B = h_3$ также имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой, обусловленный разностью максимальных критических токов решений слева 3 и справа 4. Величина скачка тока γ в

этом случае на порядок выше — $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(4) - \gamma_{cr}(3) \approx 0,07$. На отрезке $[h_3, h_4)$ критическая кривая ДК представлена ветвью пары 4. Далее, в точке $h_B = h_4$ происходит снова скачок на ветвь бифуркационной кривой пары 3. При этом $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(3) - \gamma_{cr}(4) \approx -0,08$.

В точке $h_B = h_5$ происходит очередной скачок критической кривой от ветви 3 на ветвь, принадлежащую паре 5. Величина скачка $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(5) - \gamma_{cr}(3) \approx 0,1$.

Отметим, что при $h_B = h_5$ решение с номером 5 переходит в решение 5^a . При этом (см. рис. 14) функция $\mu_{20}(h_B)$ имеет в указанной точке скачок гладкости, т.е. происходит бифуркация порядка $n = 1$ координаты $\varphi_2(x)$ пары 5.

На рис. 15 демонстрируется влияние параметра связи между слоями s на частичную критическую кривую. Видно, что с уменьшением s критическая

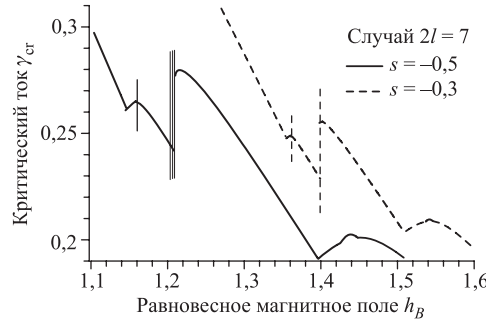


Рис. 15. Критические кривые ДК при разных значениях параметра s

кривая сдвигается направо, стремясь тем самым к положению, соответствующему независимым слоям ($s = 0$). При этом скачки критической кривой имеют более простую структуру. Например, в численном эксперименте решений вида 4 (см. рис. 12) при $s = -0,3$ не обнаружено, что говорит о наличии бифуркаций решений задачи (6) по параметру s .

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе для моделирования устойчивости и бифуркаций статических конфигураций магнитного потока в двухслойном джозефсоновском контакте применяются методы теории частичной устойчивости. Показано, что с математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [5, 6], могут быть обусловлены наличием точек разрыва непрерывности частичных критических кривых, положение которых зависит от выбора модели и значений параметров.

Отметим, что методы настоящей работы очевидным образом переносятся на случай несимметричной модели двухслойного ДК, а также на модели ДК с числом слоев больше двух.

Благодарности. Авторы благодарят проф. Л. Н. Булаевского (Лос-Аламос, США), проф. Э. Голдобина (Тюбинген, Германия), проф. Е. П. Жидкова и проф. И. В. Пузынина (ОИЯИ, Дубна), а также проф. Л. Лилова (Софийский университет «Св. Кл. Охридский», Болгария) за стимулирующие дискуссии. Работа С. Н. Димовой частично финансирована грантом № 121/2005 УФНИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В.* Вычисление бифуркаций устойчивых состояний в двухслойных неоднородных джозефсоновских переходах // Сообщение ОИЯИ Р5-89-173. Дубна, 1989.
2. *Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F.* Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // *J. Appl. Phys.* 1993. V. 73, № 5. P. 2411–2418.
3. *Bulaevskii L. N. et al.* Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50, № 17. P. 12831–12834;
Bulaevskii L. N. et al. Collective mode and the c-axis critical current of a Josephson-coupled superconductor at high parallel magnetic fields // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 53, № 21. P. 14601–14610.
4. *Nevirkovets I. P., Evetts J. E., Blamire M. G.* Transition from Single Junction to Double Junction Behavior in Sisis- Type Nb-Based Devices // *Phys. Lett. A.* 1994. V. 187, Is. 1. P. 119–126.
5. *Goldobin E., Kohlstedt H., Ustinov A. V.* Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators // *Appl. Phys. Lett.* 1996. V. 68, Is. 2. P. 250–252.
6. *Goldobin E., Ustinov A. V.* Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59, № 17. P. 11532–11538.
7. *Kleiner R. et al.* Dynamic behavior of Josephson-coupled layered structures // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50, № 6. P. 3942–3952.
8. *Song S. N. et al.* Vortex structure and Josephson supercurrent in stacked double Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 53, Is. 10. P. R6018–R6021.
9. *Koyama T., Tachiki M.* I-V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 54, № 22. P. 16183–16191.
10. *Krasnov V. M., Winkler D.* Static and dynamic properties of stacked Josephson junctions: Analytic solution // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 56, Is. 14. P. 9106–9115.

11. *Tachiki M., Machida M.* Current understanding of Josephson plasma theory and experiments in HTSC // *Physica C*. 2000. V. 341-348. P. 1493–1498.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ, вып. I, Мат., Мех. 1957. № 4. С. 9–16.
13. *Vorotnikov V. I.* Partial Stability and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 1998.
14. *Гальперн Ю. С., Филиппов А. Т.* Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 4.
15. *Likharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. Gordon and Breach. New York, 1986.
16. *Семерджиева Е. Г., Бояджиев Т. Л., Шукринов Ю. М.* Статические вихри в длинных джозефсоновских контактах с экспоненциально изменяющейся шириной // Физика низких температур. 2004. Т. 30, № 6. P. 610–618; *Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L., Shukrinov Yu. M.* Vortex Structures in Exponentially Shaped Josephson Junctions // *Journal of Low Temperature Physics*. 2005. Vol. 139, № 1/2, P. 299–308.
17. *Бояджиев Т. Л.* Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики, Дисс. на соиск. уч. степени д-ра ф.-м. наук. Дубна, 2002.
18. *Выставкин А. Н. и др.* Обнаружение статических связанных состояний флюксонов в распределенных джозефсоновских переходах с неоднородностью // Физика низких температур. 1988. Т. 14, № 6. P. 646.
19. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.
20. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.–М., 1948.
21. *Келлер Дж. Б., Антман С.* Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.
22. *Jackiw R.* Quantum meanings of classical field theory // *Rev. Mod. Phys.* 1997. V. 49. Is. 3. P. 681–706.
23. *Рыбаков Ю. П., Санюк В. И.* Многомерные солитоны. М.: Изд. РУДН, 2001.
24. *Boyadjiev T. L., Todorov M. D.* Minimal Length of Josephson Junctions with Stable Fluxon Bound States // *Superconducting Science and Technology*. 2002. V. 15, Is. 1. P. 1–7.
25. *Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В.* Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе // Сообщение ОИЯИ, P11-88-409; Дубна, 1988.
Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах // Сборник трудов конф. Числ. методы и применения. София, 1988.

26. *Zhidkov E. P., Makarenko G. I., Puzynin I. V.* Continuous analog of the Newton method in non-linear physical problems // *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*. 1973. V. 4, № 1. P. 127–166;
Puzynin I. V. et al. The generalised continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*. 1999. V. 30, № 1. P. 210–265.
27. *Thomee V.* Galerkin finite element method for parabolic problems, Berlin: Springer-Verlag, 1997
28. *Bathe K. J., Wilson E.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
29. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
30. *Barashenkov I. V., Zemlyanaya E. V.* Travelling solitons in the damped driven nonlinear Schroedinger equation // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2004. V. 64. № 3. P. 800–818;
Земляная Е. В., Барашенков И. В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией // *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17, № 1. С. 65–78.

Получено 19 октября 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 21.03.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,76. Тираж 310 экз. Заказ № 55269.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/