

УДК 517.958, 519.62/.642

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ,  
ОПИСЫВАЕМЫХ ДВОЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON**

© 2010 г. *П.Х. Атанасова\**, *Т.Л. Бояджиев*, *Ю.М. Шукринов\*\**, *Е.В. Земляная\*\*\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна 141980, Россия

\* poli@jinr.ru; \*\* shukrinv@theor.jinr.ru; \*\*\* elena@jinr.ru

Данная работа частично финансировалась Программой сотрудничества ОИЯИ с болгарскими научными центрами «ОИЯИ – Болгария» (П.Х.А.); грантом No.39/2009 Университета «Св. Кл. Охридски», София, Болгария (Т.Л.Б.). Работа Е.В.З. и Ю.М.Ш. частично финансировалась РФФИ (гранты 09-01-00770-а и 08-02-00520-а)

Целью работы является математическое моделирование статических распределений магнитного потока в длинных джозефсоновских контактах (ДК) с учетом второй гармоники в разложении джозефсоновского тока и последовательное сравнение результатов с традиционной моделью. Для анализа устойчивости каждому конкретному распределению магнитного потока в контакте ставится в соответствие спектральная задача Штурма-Лиувилля, обращение минимального собственного значения которой в нуль отвечает бифуркации распределения по одному из параметров задачи. Численное решение соответствующей нелинейной краевой задачи проводится при помощи непрерывного аналога метода Ньютона с использованием сплайн-коллокационной схемы для линеаризованных задач на каждой ньютоновской итерации. Найдены основные распределения магнитного потока и исследована их устойчивость при изменении параметров модели. Приведено сравнение полученных результатов с результатами традиционной модели для ДК типа сверхпроводник – изолятор – сверхпроводник.

Ключевые слова: длинный джозефсоновский контакт, флюксонные решения, устойчивость, ньютоновская схема, сплайн-коллокация

**NUMERICAL MODELING OF LONG JOSEPHSON JUNCTIONS IN THE FRAME  
OF DOUBLE SINE-GORDON EQUATION**

*P.Kh. Atanasova\**, *T.L. Boyadjiev*, *Yu.M. Shukrinov\*\**, *E.V. Zemlyanaya\*\*\**

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 141980, Russia

\* poli@jinr.ru; \*\* shukrinv@theor.jinr.ru; \*\*\* elena@jinr.ru

The aim of this work is a mathematical modeling of the static magnetic flux distributions in long Josephson junctions (JJ) taking into account the second harmonic in the Fourier-decomposition of the Josephson current. Stability analysis is based on numerical solution of a spectral Sturm-Liouville problem formulated for each distribution. In this approach the nullification of the minimal eigenvalue of this problem indicates a bifurcation point in one of parameters. At each

step of numerical continuation in parameters of the model, the corresponding nonlinear boundary problem is solved on the basis of the continuous analog of Newton's method with the spline-collocation discretization of linearized problems at Newtonian iterations. Main solutions of the double sine-Gordon equation have been found. Stability of magnetic flux distributions has been investigated. Numerical results are compared with the results of the standard JJ model.

Key words: ?????

## 1. Введение

Физические явления в джозефсоновских контактах (ДК) являются основой современной сверхпроводящей электроники. Для ДК типа SIS (сверхпроводник – изолятор – сверхпроводник) зависимость «ток – фаза» является синусоидальной функцией. Такая модель описывается уравнением sine-Gordon. При уменьшении прозрачности барьера имеет место отклонение от этой зависимости, при котором она может рассматриваться в виде разложения в ряд Фурье [1]. Для многих приложений важным является вклад второй гармоники, например, в контактах типа SNINS и SFIFS, где через  $N$  обозначен слой нормального металла, а через  $F$  – слой металлического ферромагнетика [2]. Различные физические механизмы ответственны за ее знак. Так, **распаривание** током приводит к ее положительному вкладу, тогда как конечная прозрачность SF и SN – к отрицательному [3].

Учет второй гармоники существенно влияет на распределение магнитного потока в ДК. Однако детальные исследования основных распределений в ДК с учетом второй гармоники и их устойчивость при изменении параметров ДК в настоящее время отсутствуют. Эти вопросы рассматриваются в данной статье.

## 2. Постановка задачи

На рис.1 показана схема длинного ДК. В своем простейшем виде ДК – это «сэндвич», составленный из двух слоев сверхпроводящего металла, которые разделены тонким диэлектрическим слоем (туннельным барьером). Контакт находится в однородном магнитном поле  $h_e$ , направленном по оси  $y$ . К системе приложен источник тока  $\varepsilon$ . В джозефсоновском (статическом) режиме [4] измеряемое прибором напряжение между сверхпроводящими слоями  $V=0$ , а в динамическом и, в частности, резистивном режиме напряжение  $V \neq 0$ . В рассматриваемом нами случае длинного ДК размеры контакта по оси  $y$  и  $z$  пренебрежимо малы и магнитный поток  $\phi$  в контакте зависит только от  $x$ .

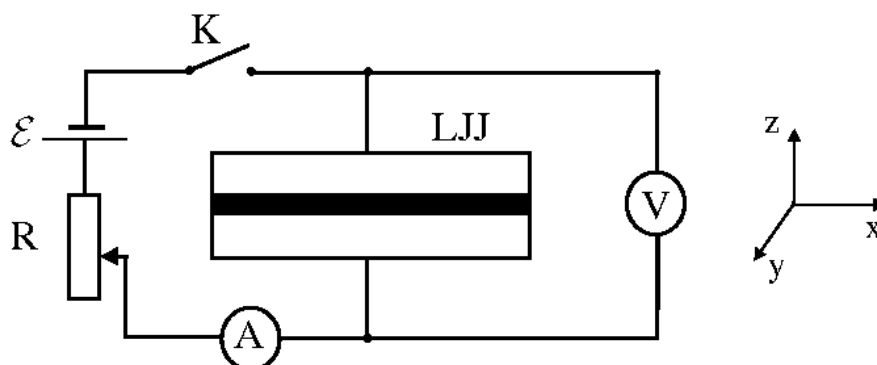


Рис.1. Схема длинного ДК.

Полный ток через ДК содержит компоненту, называемую «сверхтоком» (током Джозефсона)  $I_s$  [5]. Зависимость величины  $I_s$  от разности фаз волновых функций сверхпроводящих электродов в большинстве случаев можно считать нечетной строго  $2\pi$ -периодической [6] и, следовательно, она может быть представлена в виде ряда по синусам

$$I_s = I_c \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} I_m \sin m\varphi. \quad (2.1)$$

Основная амплитуда  $I_c$ , также как и высшие амплитуды  $I_m$ , зависит от геометрии, материалов и технологии изготовления контакта [1, 7].

Точная теория [6] показывает, что в большом числе случаев всеми членами в (2.1) кроме первого можно пренебречь, что приводит к «традиционной» модели  $I_s = I_c \sin \varphi$ . Однако существуют реальные физические ситуации для ДК, при моделировании которых необходимо учитывать не только первый, но и высшие члены в разложении (2.1) (см., например, работы [1, 7, 8, 9]). В частности, ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в (2.1), нетрудно показать [8], что в статическом режиме работы контакта [5] безразмерное распределение магнитного потока  $\varphi(x)$  вдоль оси  $x$  (см. рис.1) удовлетворяет двойному уравнению sine-Gordon (далее для краткости используем сокращение 2SG):

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, \quad x \in (-l, l). \quad (2.2)$$

Все величины здесь и ниже являются безразмерными (о способах приведения к безразмерному виду см., например, монографии [4] и [5, 10]). Штрихом обозначено дифференцирование по координате  $x$ ;  $l$  есть полудлина контакта, величина  $\gamma$  – внешний ток, а амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  соответствуют первым двум коэффициентам в общем Фурье-разложении (2.1).

Уравнения вида (2.2) встречаются в ряде задач физики. В частности, при моделировании распространения спиновых волн в анизотропных спиновых жидкостях, в нелинейной оптике (распространение ультракоротких импульсов в резонансной пятикратно вырожденной среде) и т.д. [1, 2, 3, 7].

Вопрос о нахождении аналитических решений (2.2) на бесконечном интервале ( $l \rightarrow \infty$ ) при нулевом внешнем токе  $\gamma$  подробно рассмотрен в литературе (см., например, [11]).

В случае overlap-контакта конечной длины для уравнения (2.2) ставится краевая задача с граничными условиями

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (2.3)$$

где  $h_e$  – внешнее магнитное поле, направленное по оси  $y$ .

В задачу (2.2), (2.3) входят пять параметров  $p = (l, h_e, \gamma, a_1, a_2)$ . Соответственно, любое решение зависит, помимо координаты  $x$ , от вектора параметров  $p$ :  $\varphi = \varphi(x, p)$  (в дальнейшем зависимость от  $p$  будем выписывать только при надобности). Следова-

тельно, все величины, определяемые через решения задачи (2.2), (2.3), также будут функциями  $p$ .

Физические эксперименты показывают, что с возрастанием по модулю внешнего тока  $\gamma$  существует некоторое критическое значение  $\gamma_{cr}$ , при котором контакт переходит в динамический режим работы [5]. С математической точки зрения такой переход может рассматриваться [10] как потеря устойчивости (бифуркация) некоторого из статических решений  $\varphi(x)$  задачи (2.2), (2.3) при варьировании  $\gamma$ . При этом минимальное собственное значение (МСЗ)  $\lambda_0$  соответствующей задачи Штурма – Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad x \in (-l; l), \quad (2.4a)$$

$$\psi'(\pm l) = 0, \quad (2.4b)$$

с потенциалом  $q(x, p) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$  обращается в нуль.

В общем случае величина  $\lambda_0(p)$  позволяет судить об устойчивости решений  $\varphi(x)$ . Если  $\lambda_0(p) > 0$ , то соответствующее решение устойчиво. При  $\lambda_0(p) < 0$  решение неустойчиво, а  $\lambda_0(p) = 0$  соответствует бифуркации решения в данной точке пространства параметров модели.

Отметим, что уравнения (2.2), (2.3) вместе с ЗШТЛ (2.4) вытекают из необходимого и достаточного условия экстремума функционала полной энергии контакта:

$$F(\varphi) = \int_{-l}^l \left[ \frac{1}{2} \varphi'^2 + 1 - q(x) - \gamma\varphi \right] dx - h_e \Delta\varphi, \quad (2.5)$$

где величина  $\Delta\varphi$  есть полный магнитный поток через контакт [10]

$$\Delta\varphi = \varphi(l) - \varphi(-l). \quad (2.6)$$

### 3. Численный метод

Будем рассматривать уравнения (2.2) и (2.3) при фиксированных значениях длины  $2l$ , внешнего магнитного поля  $h_e$ , внешнего тока  $\gamma$  и коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ . Это – граничная задача для дифференциального уравнения второго порядка с условиями Неймана. Для ее решения целесообразно применять итерационный алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) (см. обзоры [12, 13, 14]).

Впервые вычислительная схема на основе НАМН для решения задачи о ДК была предложена в [15]; в дальнейшем различные модификации итераций на базе НАМН успешно применялись для численного исследования моделей ДК в целом ряде работ (см. обзор [14] и цитируемую литературу).

Применительно к рассматриваемой задаче НАМН приводит к следующей последовательности итераций. Пусть начальное приближение  $\varphi_0(x)$  задано. Тогда на  $k$ -м шаге ( $k = 1, 2, \dots$ ) вычисляем:

1. Итерационную поправку  $w_k(x)$  решая линеаризованную краевую задачу

$$-w_k'' + q_{k-1}(x)w_k = \varphi_{k-1}'' - f_{k-1}(x), \quad (3.1a)$$

$$w_k'(-l) = -\varphi_{k-1}'(-l) + h_e, \quad (3.1b)$$

$$w_k'(l) = -\varphi_{k-1}'(l) + h_e, \quad (3.1c)$$

где  $f(x) = a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma$ .

## 2. Следующее приближение к точному решению

$$\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x) + \tau_k w_k.$$

Итерационный параметр  $\tau_k$  вычислялся по формуле Ермакова – Калиткина [16].

Для упрощения записи далее индексы итераций опускаются.

При численном решении линеаризованных уравнений (3.1) используем разностную схему, основанную на аппроксимации решения кубическими сплайнами [17]. Введем на интервале  $[-l; l]$  однородную сетку  $\{-l = x_1, x_2, \dots, x_N = l\}$  с шагом  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Ищем решения уравнений (3.1) в форме кубического сплайна  $S(x)$  класса  $C^2$  с узлами, совпадающими с узлами введенной сетки. Приходим к системе

$$b_1 w_1 + c_1 w_2 = d_1, \quad (3.2a)$$

$$a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} = d_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad (3.2b)$$

$$a_N w_{N-1} + b_N w_N = d_N. \quad (3.2c)$$

с коэффициентами в левой части

$$b_1 = 1 + \frac{h^2}{3} q_1, \quad c_1 = -1 + \frac{h^2}{6} q_2,$$

$$a_i = -1 + \frac{h^2}{6} q_{i-1}, \quad b_i = 2 + \frac{2h^2}{3} q_i, \quad c_i = -1 + \frac{h^2}{6} q_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$a_N = -1 + \frac{h^2}{6} q_{N-1}, \quad b_N = 1 + \frac{h^2}{3} q_N,$$

и в правой части

$$d_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - h h_e - \frac{h^2}{6} (2f_1 + f_2),$$

$$d_i = \varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1} - \frac{h^2}{6} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$d_N = -\varphi_N + \varphi_{N-1} + hh_e - \frac{h^2}{6}(f_{N-1} + 2f_N),$$

где  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $q_i = q(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ .

Уравнения (3.2) представляют собой трехдиагональную систему из  $N$  линейных алгебраических уравнений для значений сплайна в узлах сетки. Из вида коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  следует, что матрица этой системы имеет диагональное преобладание. Поэтому для решения системы используется метод прогонки без выбора главного элемента [17].

Согласно [17], описанная схема сплайн-аппроксимации имеет порядок точности  $O(h^2)$ , что подтверждается тестовыми расчетами на последовательности вдвое сгущающихся сеток.

Задача (2.2)–(2.3) решалась на последовательности равномерных сеток с шагами  $h$ ,  $h/2$ ,  $h/4$ ,  $h = 2l/(N-1)$ ,  $N = 513$ . Результаты для решений вида  $\Phi^1$ , приведенные в табл.1, показывают, что значения  $\sigma(x_i)$ , вычисленные по формуле

$$\sigma(x_i) = \frac{\varphi_h(x_i) - \varphi_{h/2}(x_i)}{\varphi_{h/2}(x_i) - \varphi_{h/4}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

близки к  $2^2$ , что соответствует теоретическому порядку точности  $O(h^2)$  рассматриваемой сплайн-коллокационной схемы на равномерной сетке.

**Таблица 1.** Значения функции  $\varphi$  и величины  $\sigma$  (3,5) на концах интервала  $[-l; l]$

для решения типа  $\Phi^1$  при  $2l = 10$ ,  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 2$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.5$ .

$N$	$\varphi(-l)$	$\varphi(l)$
513	-2.295786926998205	8.578972227160438
1025	-2.295516135758195	8.578701434682609
2049	-2.295450140985348	8.578632131451062
$\sigma \approx$	4.1	3.9

Для аппроксимации ЗШТЛ (2.4) используются трехточечные конечно-разностные формулы второго порядка [18]. В результате, задаче (2.4) ставится в соответствие линейная алгебраическая задача на собственные значения вида

$$A\psi_h = \lambda\psi_h,$$

где вектор  $\psi_h = (\psi(x_1), \psi(x_2), \dots, \psi(x_N))^T$  и  $A$  – трехдиагональная матрица. Для вычисления первых нескольких собственных значений полученной матрицы  $A$  используется стандартная подпрограмма [19].

#### 4. Численные результаты

Для ясности при дальнейшем изложении необходимо коротко остановиться на некоторых основных типах статических решений, которые имеют место в традиционном

случае ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ). В нулевом поле ( $h_e = 0$ ) задача (2.2), (2.3) имеет множество мейсснеровских (тривиальных, вакуумных) решений вида  $\varphi(x) = \arcsin(\gamma) + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Решения, вытекающие из главного значения функции  $\arcsin$  устойчивые, а остальные – неустойчивые. В дальнейшем устойчивое и неустойчивое мейсснеровские решения будем соответственно обозначать  $M_0$  и  $M_\pi$ .

Важную роль в теории играют решения, соответствующие вихревым распределениям магнитного потока в контакте. Простейшими вихревыми решениями являются флюксонное/антифлюксонное решения (ниже используются сокращенные обозначения  $\Phi^1$ ,  $\Phi^{-1}$ ), для которых в «бесконечном» контакте ( $l \rightarrow \infty$ ) при  $h_e = 0$  и  $\gamma = 0$  имеются известные точные аналитические выражения [10]

$$\Phi_\infty^{\pm 1} \equiv \varphi(x) = 4 \arctan \exp(\pm x) + 2k\pi, \quad (4.1)$$

Здесь знак ‘+’ соответствует флюксону  $\Phi^1$ , а знак ‘-’ – антифлюксону  $\Phi^{-1}$ .

В контактах конечной длины объекты вида (4.1) не являются флюксонами в строгом смысле слова (т.е., не являются точными решениями краевой задачи (2.2), (2.3)), но ряд их особенностей, и в частности, конечные энергия и размеры, обуславливают целесообразность и удобство использования такой терминологии.

В ДК конечной длины  $2l$  существуют также многофлюксонные распределения, для которых ниже используются обозначения вида  $\Phi^n$ . Здесь  $n$  есть число вихрей, определяемое как значение функционала [14]

$$N[\varphi] = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x, p) dx, \quad (4.2)$$

в точке  $\varphi(x, p)$ . Для «бесконечного» контакта выражение в правой части следует понимать в смысле предельного перехода.

Так как любое решение  $\varphi(x)$  задачи (2.2), (2.3) определено с точностью до  $2k\pi$ , то и значение  $N(\varphi)$  определено с точностью до  $2k$ . Произвол при выборе целого числа  $k$  можно использовать для «согласования» значения  $N(p)$  со значением полного магнитного потока распределения  $\Delta\varphi(p)$  в соответствии с условием

$$|N[\varphi] - \Delta\varphi/2\pi| \rightarrow \min.$$

В частности, выбирая  $k = 0$  и  $k = -1$  для решений (4.1), легко проверить, что  $N[\Phi_\infty^{\pm 1}] = \pm 1$  и  $\Delta\varphi/2\pi = \pm 1$ .

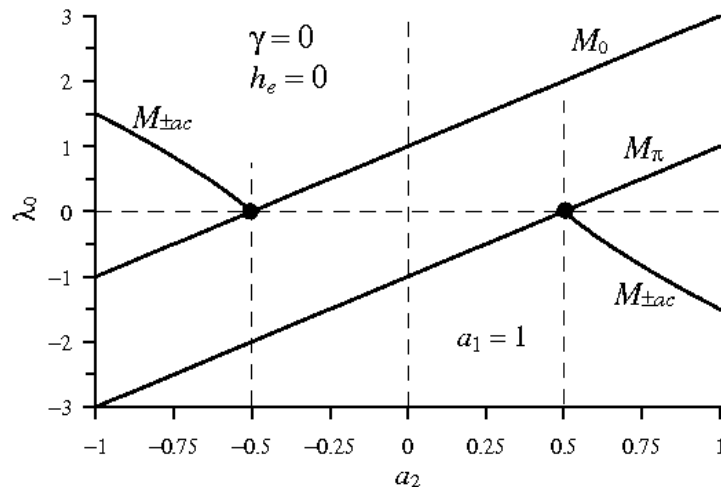
Если внешний ток  $\gamma = 0$ , то для любого допустимого поля  $h_e$  решения  $M_0$ ,  $M_\pi$  и  $n$ -флюксонные/антифлюксонные распределения  $\Phi^{\pm n}$  характеризуются значениями  $N[M_0] = 0$ ,  $N[M_\pi] = 1$  и  $N[\Phi^{\pm n}] = \pm n$ .

#### 4.1. Константные решения 2SG-уравнения и их устойчивость. Учет второй гар-

моники  $a_2 \sin 2\varphi$  в модели (2.2) приводит к тому, что для  $\gamma = 0$  и  $h_e = 0$ , кроме известных в традиционном случае ( $a_1 = 1, a_2 = 0$ ) тривиальных решений  $M_0$  и  $M_\pi$ , существуют еще два класса решений  $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2) + 2k\pi$  (обозначаемые как  $M_{\pm ac}$ ). Соответствующие МСЗ как функции коэффициентов 2SG-уравнения (2.2) имеют вид

$$\lambda_0(M_0) = a_1 + 2a_2, \quad \lambda_0(M_\pi) = -a_1 + 2a_2, \quad \lambda_0(M_{\pm ac}) = (a_1^2 - 4a_2^2) / 2a_2.$$

На рис.2 показаны зависимости МСЗ четырех КР от  $a_2$  при заданном  $a_1 = 1$ . Тривиальному случаю соответствует вертикальная прямая  $a_2 = 0$ . Здесь существуют только два константных распределения (КР):  $M_0$ , для которого  $\lambda_0 = 1$ , и  $M_\pi$  для которого  $\lambda_0 = -1$ . В интервале  $a_2 \in (-0.5; 0.5)$  знаки МСЗ сохраняются.



**Рис.2.** МСЗ для КР при  $\gamma = 0, h_e = 0$  в зависимости от параметра  $a_2$  при фиксированном положительном значении параметра  $a_1 = 1$ .

Точки  $a_2 = \pm 0.5$  являются точками бифуркации. При  $a_2 < -0.5$  два распределения  $M_{\pm ac}$  суть единственные устойчивые состояния. При  $a_2 > 0.5$  есть также два устойчивых решения  $M_0$  и  $M_\pi$ .

Экспоненциальная устойчивость КР определяется знаками параметров  $a_1, a_2$  и их отношением  $a_1/a_2$ .

В случае  $\gamma \neq 0$  КР суть  $\varphi = \arcsin z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 1, \dots$ , где  $z$  являются решениями алгебраического уравнения четвертой степени  $4a_2^2 z^4 + (a_1^2 - 4a_2^2)z^2 - 2a_1\gamma z + \gamma^2 = 0$ .

**4.2. Некоторые флюксонные решения.** В данной работе вычисления проводились с числом точек дискретной аппроксимации  $N = 1025$  на интервале  $[-5; 5]$  при  $a_1 = 1$ .

В табл.2, 3 и 4 демонстрируются величины  $\lambda_0$ , числа флюксонов  $N[\varphi]$ , значения распределений в середине интервала  $\varphi(0)/\pi$ , полного магнитного потока  $\Delta\varphi/2\pi$  и полной энергии контакта  $F/8$ .

Значения основных физических характеристик  $M_0, M_\pi$  и однофлюксонных реше-



ний  $\Phi^{\pm 1}$  в традиционном случае  $a_2 = 0$  показаны в табл.2. Единственное устойчивое решение есть  $M_0(\lambda_0 = 1)$ . В следующих двух строках табл.2 показаны однофлюксонные решения  $\Phi^{\pm 1}$ . Для них  $\lambda_0 = -0.0007$ , т.е. при нулевом внешнем поле и при нулевом внешнем токе эти решения близки к бифуркационному состоянию, но все-таки остаются неустойчивыми. Значения  $\varphi(0)/\pi = \pm 1$ ,  $\Delta\varphi/2\pi \approx \pm 0.98$  и  $F[\Phi^{\pm 1}]/8 \approx 1$  показывают сходство с флюксонами  $\Phi_{\infty}^{\pm 1}$  в бесконечном контакте (4.1). Последнее решение в табл.2 есть  $M_{\pi}$ , для него  $\lambda_0 = -1$ . Для этого КР число флюксонов равно единице. Из последнего столбца 2 видно, что энергия рассмотренных решений растет с уменьшением соответствующих  $\lambda_0$ .

Значения основных физических характеристик некоторых из решений при значениях параметров  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_2 = 0.2$  показаны в табл.3, а при значениях параметров  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_2 = 0.7$  – в табл.4. Единственное решение, которое всегда остается устойчивым при рассмотренных значениях параметров задачи – это мейсснеровское решение  $M_0$ . Из табл.2, 3 и 4 видно, что для КР  $M_{\pi}$  при  $a_2 = 0$  величина  $\lambda_0 = -1$ , при  $a_2 = 0.2$ ,  $\lambda_0 = -0.6$ , т.е.  $M_{\pi}$  неустойчиво. При  $a_2 = 0.7$  величина  $\lambda_0 = 0.4$ , т.е.  $M_{\pi}$  устойчиво. Решения  $M_{\pm ac}$  существуют при  $a_2 > 0.5$  (табл.4), и для указанных значений параметров являются неустойчивыми. Из всех рассмотренных в табл.2–4 решений  $M_{\pm ac}$  – единственные, для которых число флюксонов нецелое. В частности, при  $a_2 = 0.7$  имеем  $N[M_{\pm ac}] \approx \pm 0.75$ .

**Таблица 2.** Некоторые решения при  $2l = 10$ ,  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_2 = 0$ .

Тип	$\lambda_0$	$N[\varphi]$	$\varphi(0)/\pi$	$\Delta\varphi/2\pi$	$F[\varphi]/8$
$M_0$	1	0	0	0	0
$\Phi^{-1}$	-0.0007	-1	-1	-0.9828	0.9998
$\Phi^1$	-0.0007	1	1	0.9828	0.9998
$M_{\pi}$	-1	1	1	0	2.5

**Таблица 3.** Некоторые решения при  $2l = 10$ ,  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_2 = 0,2$ .

Тип	$\lambda_0$	$N[\varphi]$	$\varphi(0)/\pi$	$\Delta\varphi/2\pi$	$F[\varphi]/8$
$M_0$	1.4	0	0	0	-0,5
$\Phi^{-1}$	-0.0003	-1	-1	-0.9919	0.7434
$\Phi^1$	-0.0003	1	1	0.9919	0.7434
$M_{\pi}$	-0.6	1	1	0	2

На рис.3 показано поведение полной энергии при изменении амплитуды  $a_2$  для рассматриваемых распределений в контакте при  $h_e = 0$ . Хорошо видно, что энергия «традиционных» мейсснеровских решений  $M_0$  и  $M_{\pi}$  убывает, а полная энергия  $M_{\pm ac}$

растет при увеличении параметра  $a_2$ . Единственным устойчивым в области изменения параметра  $a_2 \in [0; 0.5]$ , а следовательно, реализуемым в эксперименте, является «стандартное» мейсснеровское распределение  $M_0$ . При  $a_2 > 0.5$  появляется еще одно устойчивое состояние  $M_\pi$ , при этом  $F[M_0] < F[M_\pi]$ , следовательно, КР  $M_0$  имеет бóльшую вероятность экспериментальной реализации.

**Таблица 4.** Некоторые решения при  $2l = 10$ ,  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_2 = 0,7$ .

Тип	$\lambda_0$	$N[\varphi]$	$\varphi(0)/\pi$	$\Delta\varphi/2\pi$	$F[\varphi]/8$
$M_0$	2,4	0	0	0	-1.75
$M_\pi$	0,4	1	1	0	0.75
$\Phi^{-1}$	-0.0001	-1	-1	-0.9983	-0.0259
$\Phi^1$	-0.001	1	1	0.9983	-0.0259
$M_{-ac}$	-0.6857	-0.7532	-0.7532	0	2.1071
$M_{ac}$	-0.6857	0.7532	0.7532	0	2.1071

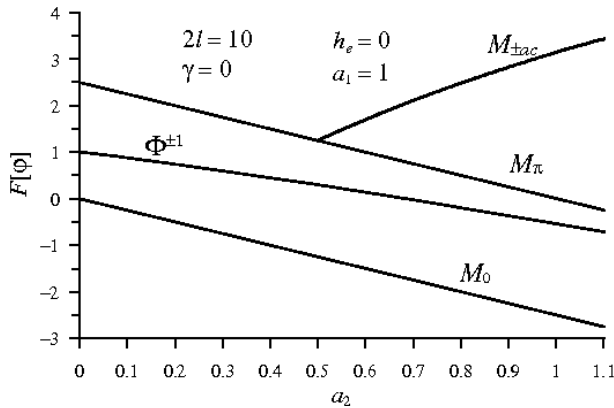
В достаточно больших магнитных полях ситуация существенно меняется. В качестве примера рассмотрим рис.4, на котором демонстрируются кривые зависимости полной энергии от  $a_2$  только для устойчивых распределений в поле  $h_e = 0.2$ . До значений  $a_2 \approx 0.6$  устойчивыми являются два распределения –  $M_0$  и  $\Phi^1$ . При этом  $F[M_0] < F[\Phi^1]$  и, следовательно, распределение  $M_0$  энергетически более выгодно, то есть, в эксперименте вероятность его реализации больше вероятности реализации распределения  $\Phi^1$ . В случае  $a_2 = 0$  аналогичный эффект отмечен в классической работе [20]. Экспериментальное подтверждение для контактов с микрорезистивной неоднородностью в барьерном слое имеется в [21].

При  $a_2 > 0.6$  устойчивым в контакте становится также решение  $M_\pi$ . Так как соответствующая полная энергия больше полных энергий распределений  $M_0$  и  $\Phi^1$ , то вероятность реализации  $M_\pi$  в эксперименте – наименьшая.

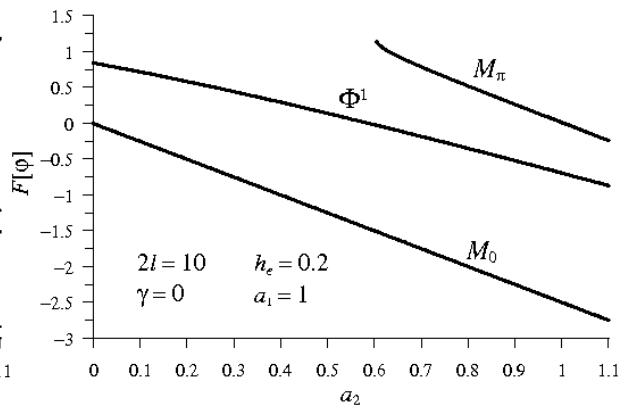
На рис.5 демонстрируется деформация производных решений (внутреннего магнитного поля) вида  $\Phi^1$  под влиянием параметра  $a_2$ . Внутреннее магнитное поле  $\varphi'(x)$ , соответствующее решению  $\Phi^1$ , симметрично относительно  $x = 0$  при всех значениях параметра  $a_2$  (рис.5). При  $a_2 = 0.5$  кривая  $\varphi'(x)$  имеет в окрестности центра  $x = 0$  плато. Дальнейшее возрастание параметра  $a_2$  приводит к формированию двух максимумов функции  $\varphi'(x)$ . Тем самым, учет коэффициента  $a_2$  приводит к качественному изменению вида флюксонов.

Рассмотрим физические характеристики однофлюксонного решения  $\Phi^1$ , представленные в табл.2, 3 и 4. Число флюксонов (4.2) остается постоянным –  $N[\Phi^1] = 1$  при

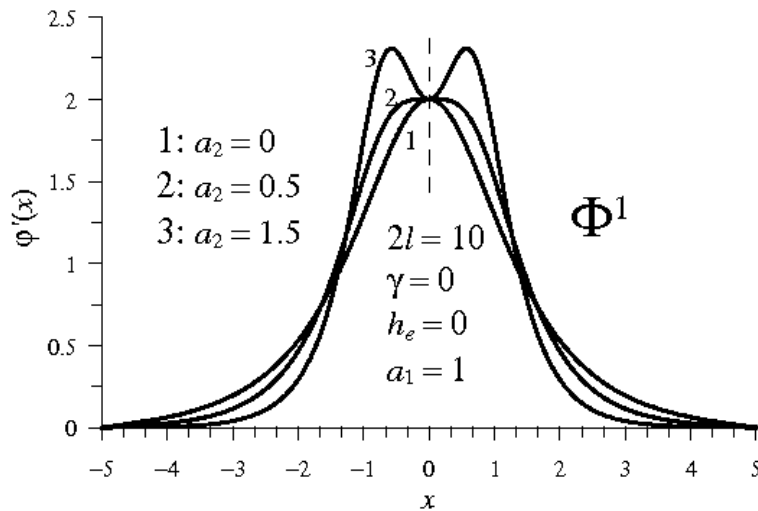
изменении коэффициента  $a_2$ . При увеличении параметра  $a_2$  полный магнитный поток (2.6) для этого решения приближается к значению этой характеристики для флюксона в бесконечном контакте (4.1) ( $\Delta\varphi = 1$ ). При этом значения функции  $\varphi(0)/\pi = 1$  не меняются при изменении амплитуды. Полная энергия (2.5) убывает при увеличении параметра  $a_2$ , что демонстрируется на рис.3.



**Рис.3.** Зависимость полной энергии от параметра  $a_2$  при фиксированных значениях  $h_e=0$ ,  $\gamma=0$  и  $2l=10$  для КР и  $\Phi^{\pm 1}$ .



**Рис.4.** Зависимость полной энергии от параметра  $a_2$  при фиксированных значениях  $h_e=0,2$ ,  $\gamma=0$  и  $2l=10$  для устойчивых состояний  $M_0$ ,  $M_\pi$  и  $\Phi^1$ .



**Рис.5.**  $\Phi^1$  при  $a_1=1$ ,  $\gamma=0$ ,  $h_e=0$  и  $2l=10$  при изменении параметра  $a_2$ .

При увеличении внешнего магнитного поля  $h_e$  могут существовать более сложные устойчивые флюксонные состояния. В качестве примеров на рис.6 показаны производные двух-флюксонные решения  $\Phi^2$  при  $h_e=2$  для трех положительных значений коэффициента  $a_2$ .

Отметим, что вид кривых  $\varphi'(x)$  качественно меняется при  $a_2 > 0.5$ . Имеет место симметрия относительно вертикальной оси  $x=0$ . При этом число флюксонов  $N[\varphi]$  не

меняется:  $N[\Phi^2] = 2$ . При  $a_2 = 0.5$  кривая  $\varphi'(x)$  для решения  $\Phi^2$  имеет в окрестностях точек  $x = \pm 1.9$  плато ( $\varphi'(x) \approx 2.2$ ). Дальнейшее возрастание параметра  $a_2$  приводит к формированию двух максимумов собственного магнитного поля в местах плато.

Каждая кривая для  $M_0$  имеет два нуля, соответствующие минимальному и максимальному значениям тока  $\gamma$ . Расстояние между нулями определяет область существования (устойчивости) решений. В качестве примера на рис.8 показано влияние параметра  $a_2$  на область устойчивости мейсснеровского решения  $M_0$  – с возрастанием  $a_2$  область  $\Delta\gamma$  монотонно растет.

На рис.7 показано также рождение устойчивых состояний  $M_\pi$  из неустойчивых при  $a_2 > 0.5$ . При  $a_2 = 0.5$  кривая  $\lambda_0(\gamma)$  для  $M_\pi$  имеет в точке  $\gamma = 0$  ноль. Тем самым значение  $a_2 = 0.5$  является бифуркационным для  $M_\pi$  и  $M_{\pm ac}$ . В этом случае указанные решения совпадают.

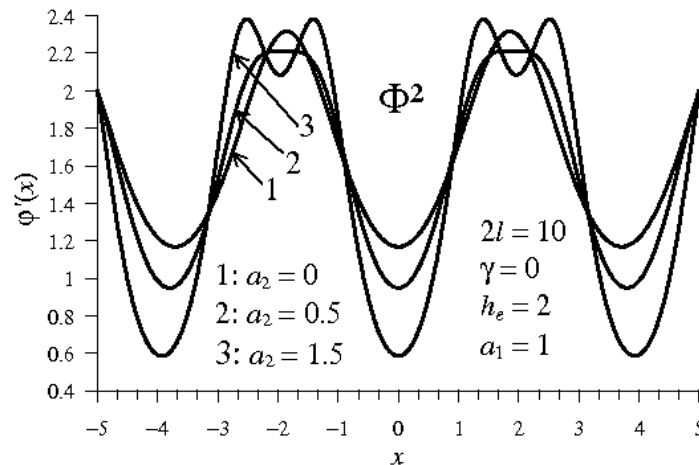


Рис.6. Двух-флюксонные решения  $\Phi^2$  при  $a_1 = 1$ ,  $2l = 10$ ,  $\gamma = 0$  и  $h_e = 2$  при изменении параметра  $a_2$ .

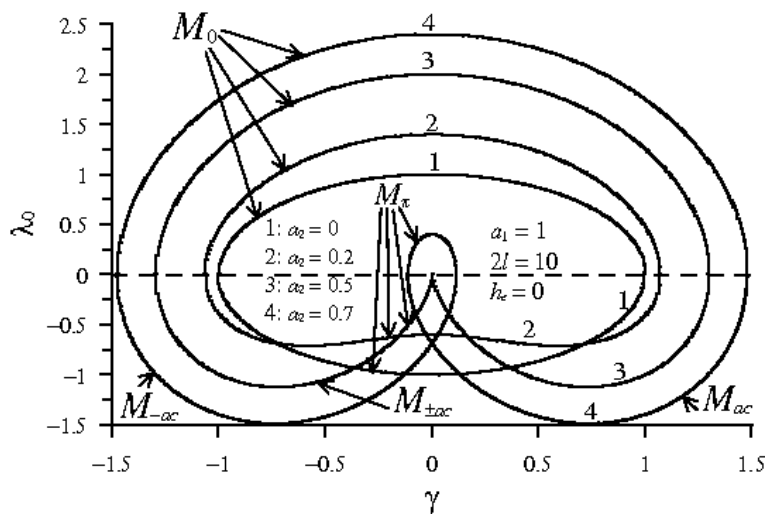
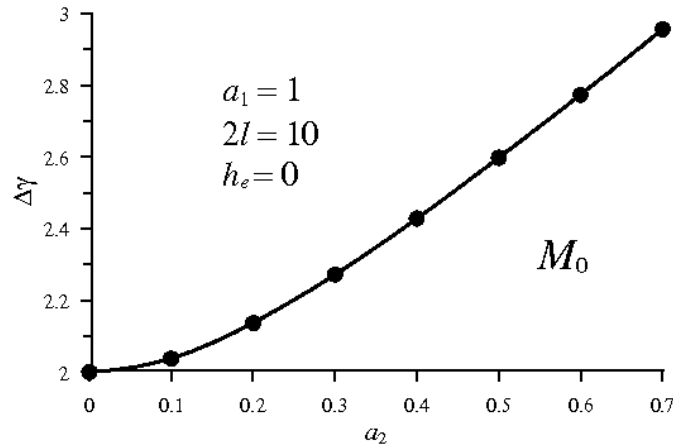


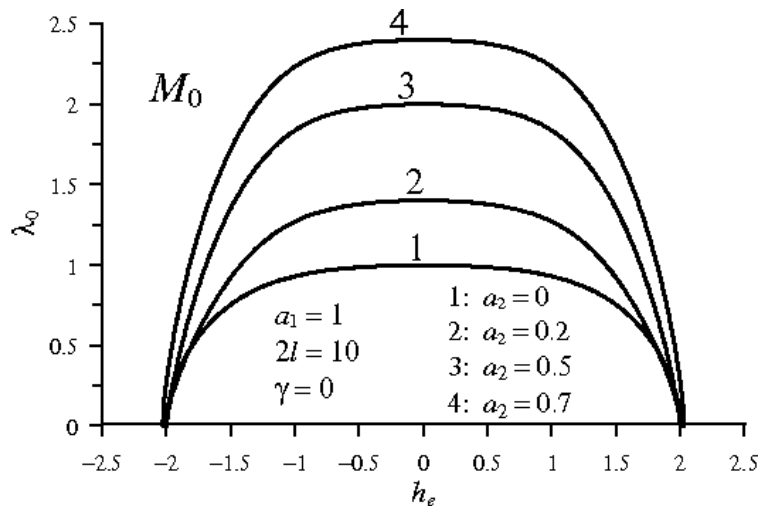
Рис.7. Зависимость МСЗ от внешнего тока  $\gamma$  для КР при фиксированных значениях  $a_1 = 1$ ,  $h_e = 0$  и  $2l = 10$  и при разных значениях параметра  $a_2$ .

При возрастании параметра  $a_2 > 0.5$  график  $\lambda_0(\gamma)$  расщепляется на три части. Ветвь, соответствующая решению  $M_\pi$ , расположена в полуплоскости  $\lambda_0 \geq 0$ .



**Рис.8.** Зависимость области устойчивости по внешнему току  $\gamma$  решения  $M_0$  от параметра  $a_2$  при  $a_1=1$ ,  $2l=10$  и  $h_e=0$ .

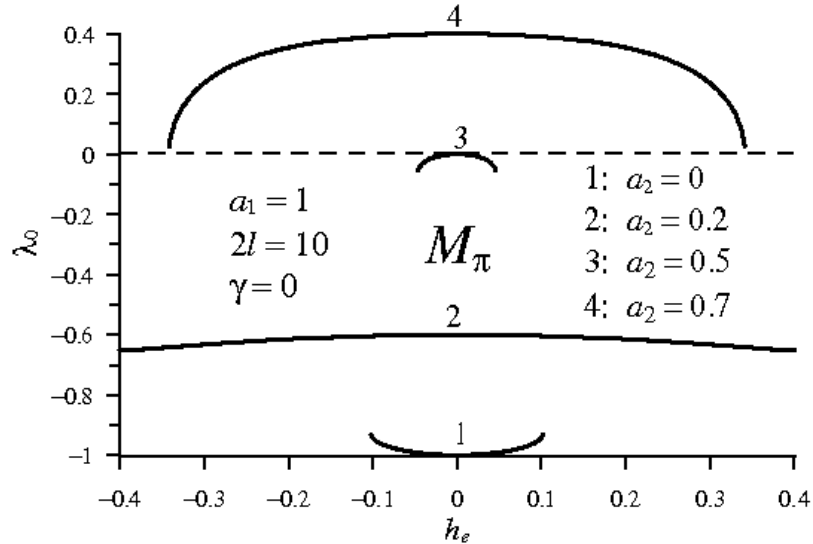
**4.3 Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$ .** На рис.9 показана зависимость  $\lambda_0(h_e)$  для мейсснеровского решения  $M_0$  при  $\gamma=0$  для нескольких значений параметра  $a_2$ . Видно, что  $\lambda_0(h_e)$  растет с увеличением параметра  $a_2$ , т.е., частота отклика контакта на произвольное малое возмущение возрастает [10].



**Рис.9.** Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для  $M_0$  при  $\gamma=0$  и при нескольких значениях параметра  $a_2$ .

На рис.10 демонстрируется переход из неустойчивого в устойчивое состояние решения  $M_\pi$  при изменении коэффициента  $a_2$ . Кривая 1 соответствует решению в традиционном случае ( $a_2=0$ ). При значениях  $a_2 < 0.5$  величина  $\lambda_0(h_e) < 0$ , т.е. состояние  $M_\pi$  неустойчиво. С увеличением параметра  $a_2$ , график  $\lambda_0(h_e)$  поднимается вверх. При  $a_2=0.5$  кривая  $\lambda_0(h_e)$  касается прямой линии  $\lambda_0=0$  в точке  $h_e=0$ . Следовательно, точка  $a_2=0.5$  является точкой бифуркации по параметру  $a_2$ . При  $a_2 > 0.5$  состояние

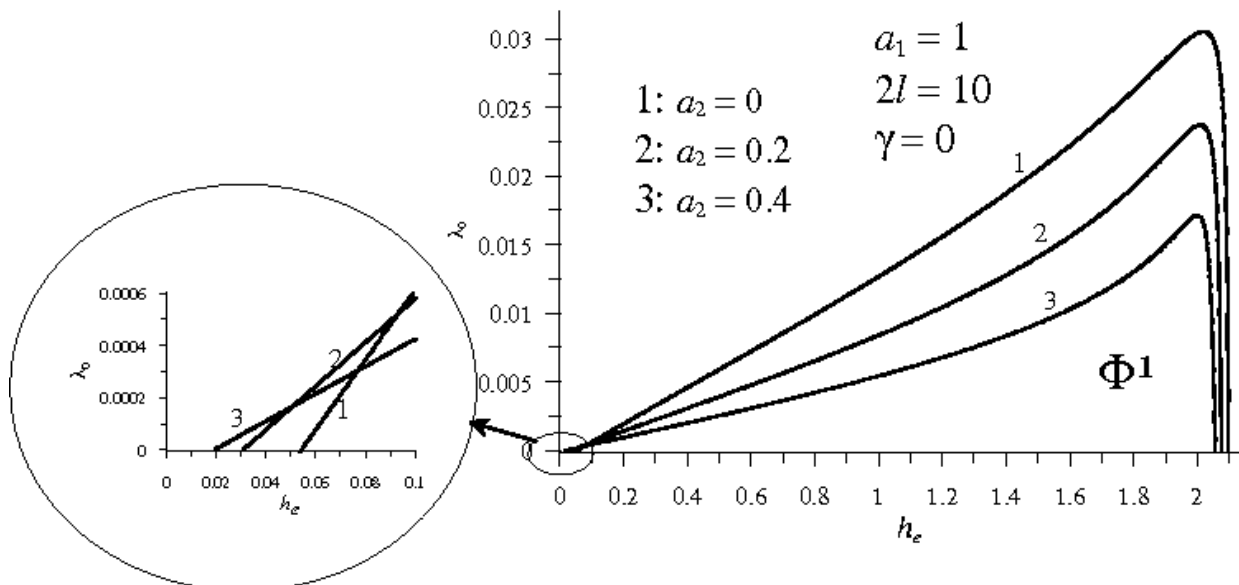
$M_\pi$  устойчиво (кривая 4 на рис.10). Решение  $M_\pi$  устойчиво в области  $|h_e| < 0.34$  при  $a_2 = 0.7$ .



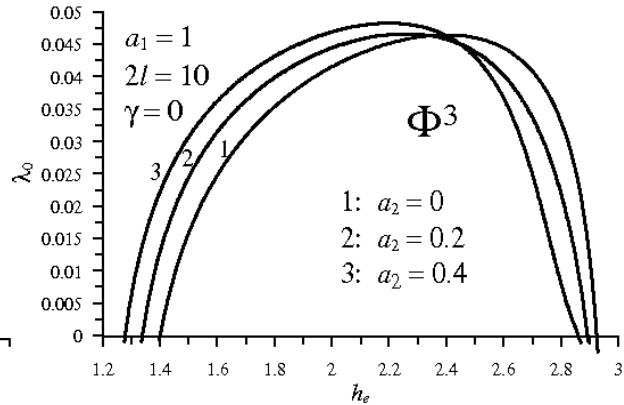
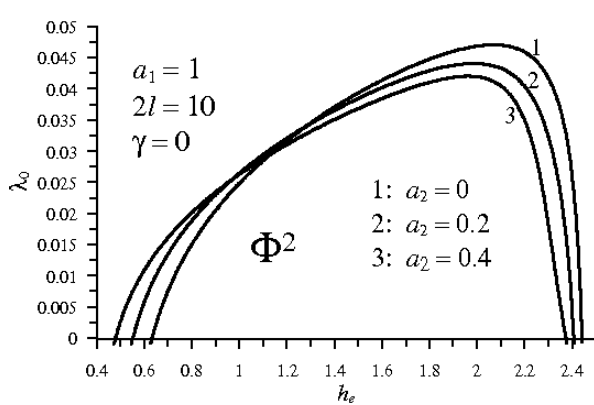
**Рис.10.** Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для КР  $M_\pi$  при  $\gamma = 0$  и разных значениях параметра  $a_2$ .

Там, где касательная к кривым  $\lambda_0(h_e)$  перпендикулярна оси абсцисс, имеет место бифуркация высшего порядка (т.е.  $\lambda_n = 0$ ,  $n > 0$ ).

На рис.11, 12, 13 демонстрируется зависимость  $\lambda_0(h_e)$  для флюксонных решений  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$  и  $\Phi^3$  для положительных значений параметра  $a_2$ . При  $h_e < 0$  решениям  $\Phi^n$  соответствуют решения  $\Phi^{-n}$ , графики  $\lambda_0(h_e)$  которых симметричны относительно вертикальной оси. При  $h_e = 0$  все флюксонные решения неустойчивы. Для всех показанных решений область устойчивости по  $h_e$  смещается с возрастанием  $a_2$ .



**Рис.11.** Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для флюксонных решений  $\Phi^1$  при  $\gamma=0$ ,  $2l=10$  для разных значений параметра  $a_2$ .



**Рис.12.** Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для флюксонных решений  $\Phi^2$  при  $\gamma=0$ ,  $2l=10$  для нескольких значений параметра  $a_2$ .

**Рис.13.** Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для флюксонных решений  $\Phi^3$  при  $\gamma=0$ ,  $2l=10$  для нескольких значений параметра  $a_2$ .

Таким образом, при рассмотренных значениях коэффициента  $a_2 \in [0; 0.4]$  не проявляются существенные качественные изменения кривых  $\lambda_0(h_e)$  для решений  $\Phi^1$ ,  $\Phi^2$  и  $\Phi^3$ .

**Заключение**

В работе проведено математическое моделирование статических распределений магнитного потока в длинном ДК, описываемом двойным уравнением sine-Gordon. Исследована устойчивость флюксонных (вихревых) решений при изменении параметров  $h_e$  и  $\gamma$  для разных значений коэффициента  $a_2$  и изучена их деформация при изменении параметра  $a_2$ . Показано, что учет параметра  $a_2$  приводит к стабилизации неустойчивых в традиционном случае мейсснеровских решений. Найдены новые константные решения, которые отсутствуют в традиционной модели при  $a_2 = 0$ .

Авторы благодарят И.В. Пузынина и Т.П. Пузынину за поддержку и ценные обсуждения.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Golubov A.A., Kypriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Rev. Mod. Phys., Apr 2004, v.76, 411, p.411.
2. Ryazanov V.V., Oboznov V.A., Rusanov A.Yu. et al. Coupling of Two Superconductors through a Ferromagnet: Evidence for a  $\pi$  Junction // Phys. Rev. Lett., 2001, v.86, p.2427.
3. Golubov A.A., Kypriyanov M.Yu. The current phase relation in Josephson tunnel junctions // Pis'ma v ZhETF, 2005, v.81, iss.7, p.419-425.
4. Likharev K.K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits // Gordon and Breach, New York,

1986, 634 p.

5. *Лухарев К.К.* Введение в динамику джозефсоновских переходов – М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.
6. *Лухарев К.К.* Сверхпроводящие слабые связи: стационарные процессы // УФН, 1979, т.127, с.185.
7. *Buzdin A., Koshelev A.E.* Periodic alternating 0-and  $\pi$ -junction structures as realization of  $\varphi$  - Josephson junctions // Phys. Rev. B, 2003, v.67, 220504(R).
8. *Hatakenaka N., Takayanagi H., Kasai Y., Tanda S.* Double sine-Gordon fluxons in isolated long Josephson junction // Physica B, 2000, v.284-288, p.563-564.
9. *Nishida M., Murata K., Fujii T., Hatakenaka N.* Time dilation of a bound half-fluxon pair in a long Josephson junction with a ferromagnetic insulator // Phys.Rev. Lett., 2007, v.99, 207004.
10. *Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т.* Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ, т.86, вып. 4 (1984), с.1527; Sov. Phys. JETP, 1984, вып.59, p.894.
11. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: ФМЛ, Наука, 1993.
12. *Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В.* Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики // ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.1, с.127.
13. *Пузынин И.В., Амирханов И.В., Земляная Е.В., Первушин В.Н., Пузынина Т.П., Стриж Т.А., Лахно В.Д.* Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей // ЭЧАЯ, 1999, т.30, вып.1, с.210-265.
14. *Пузынин И.В., Бояджиев Т.Л., Виницкий С.И., Земляная Е.В., Пузынина Т.П., Чулуунбаатар О.* О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов // ЭЧАЯ, 2007, т.38, вып.1, с.144-232.
15. *Касчиев М.С., Касчиева В.А., Маханьков В.Г., Пузынина Т.П., Пузынин И.В., Филиппов А.Т.* Численное исследование устойчивости и точек бифуркации связанных статических состояний флюксонов в круговом джозефсоновском переходе с микронеоднородностями // Сообщение ОИЯИ, P11-84-832, 1984.
16. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // ЖВМиМФ, 1981, вып.21, № 2, с. 491.
17. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.
18. *Березин Н.С., Жидков Е.П.* Методы вычислений. – М.: Наука, 1960.
19. TRIDIB -- translation of the ALGOL procedure BISECT, Num. Math. 9, 386-393(1967) by Barth, Martin, and Wilkinson. Handbook for Auto. Comp., vol.ii – linear algebra, 249-256(1971).
20. *Owen C.S., Scalapino D.J.* Vortex structure and critical currents in Josephson junctions // Phys. Rev. Lett., 1967, v.164, № 2, с.538-544.
21. *Выставкин А.Н., Драчевский Ю.Ф., Кошелец В.П., Серпученко И.Л.* Обнаружение статических связанных состояний флюксонов в распределенных джозефсоновских переходах с неоднородностью // Физика низких температур, 1988, т.14, №6, с. 646.

Поступила в редакцию 01.02.2010.



