

# Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых двойным уравнением sine-Gordon

П.Х. Атанасова, Т.Л. Бояджиев, Е.В. Земляная, and Ю.М. Шукринов  
e-mail: poli@jinr.ru, Laboratory of Information Technologies, JINR, Dubna

## РАЗДЕЛ: НАНОТЕХНОЛОГИИ

### 1. Постановка задачи.

Многообразие физических свойств джозефсоновских контактов является основой современной сверхпроводящей электроники. Известно, что для туннельных джозефсоновских контактов типа SIS (сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник) зависимость ток-разность фаз является синусоидальной функцией. При уменьшении прозрачности барьера возможно отклонение от этой зависимости, которое в достаточно общем случае выражается нечетной функцией, т.е., может рассматриваться в виде разложения в ряд Фурье [1] по синусам. Учет высших гармоник в этом разложении существен, например, в контактах типа SNINS и SFIFS, где N это нормальный металл, а F – ферромагнетик [2].

В монографии [3] показано, что для достаточно широкого класса джозефсоновских контактов сверхпроводящий ток Джозефсона как функция магнитного потока  $\varphi$  (разности фаз волновых функций сверхпроводников) может быть представлен в виде ряда по синусам. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в этом разложении, нетрудно показать [4], что распределение величины  $\varphi(x)$  вдоль оси  $x$  контакта в статическом режиме [3] удовлетворяет двойному уравнению sine-Gordon (далее для краткости используем сокращение 2SG)

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, x \in (-l; l). \quad (1)$$

Здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по координате  $x$ . Величина  $\gamma$  есть внешний ток,  $l$  есть полудлина контакта, а  $a_1$  и  $a_2$  – параметры, зависящие от технологии изготовления контакта [1, 5]. Все величины являются безразмерными.

В случае in-line геометрии контакта граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (2)$$

где  $h_e$  внешнее магнитное поле.

С математической точки зрения переход контакта в динамический режим [3] рассматривается [6, 7] как потеря устойчивости (бифуркация) некоторого из статических решений  $\varphi(x)$  задачи (1), (2) при варьировании одного

из параметров  $\gamma$  или  $h_e$ . При этом минимальное собственное значение (МСЗ)  $\lambda_{min}$ , порожденной этим решением задачи Штурма-Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(\pm l) = 0 \quad (3)$$

с потенциалом  $q(x) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$ , обращается в нуль.

2. Численный метод. Численное решение граничной задачи (1),(2) проводилось на основе непрерывного аналога метода Ньютона [7]. На каждом итерационном шаге ньютоновской схемы соответствующая линеаризованная задача решалась с использованием сплайн-коллокационной разностной схемы второго порядка точности [8].

### 3. Численные результаты и выводы.

Учет второй гармоники  $a_2 \sin 2\varphi$  приводит к тому, что для  $\gamma = 0$  и  $h_e = 0$ , кроме известных в традиционном случае ( $a_2 = 0$ ) тривиальных решений  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  (ниже обозначаются через  $M_0$  и  $M_\pi$ , соответственно), существуют еще два решения  $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$  (обозначаемые как  $M_{\pm ac}$ ). Соответствующие МСЗ как функции коэффициентов 2SG-уравнения имеют вид  $a_1 + 2a_2$ ,  $-a_1 + 2a_2$  и  $(a_1^2 - 4a_2^2)/2a_2$  соответственно. Экспоненциальная устойчивость этих константных решений (КР) определяется знаками параметров  $a_1$  и  $a_2$  и отношением параметров  $a_1/a_2$ .

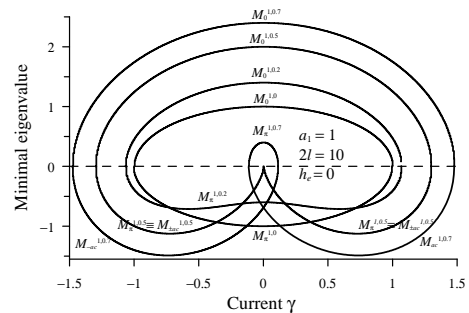


Рис. 1: Зависимость МСЗ  $\lambda_{min}$  от внешнего тока  $\gamma$  для КР при фиксированных значениях  $a_1 = 1$ ,  $h_e = 0$  и  $2l = 10$  и при разных значениях параметра  $a_2$ .

На рис. 1 демонстрируются зависимости величины  $\lambda_{min}$  от внешнего тока  $\gamma$  для КР при нескольких положительных значениях параметра

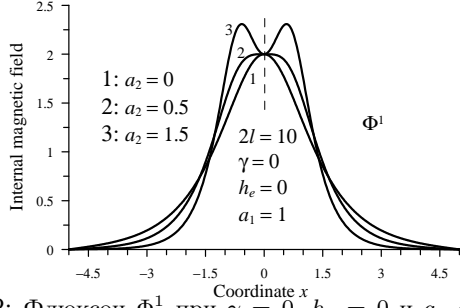


Рис. 2: Флюксон  $\Phi^1$  при  $\gamma = 0$ ,  $h_e = 0$  и  $a_1 = 1$  при изменении параметра  $a_2$ .

$a_2$ . Хорошо просматривается рождение устойчивых состояний  $M_{\pm ac}$  внешним током  $\gamma$  при  $a_2 > 0.5$ .

Важную роль для физики контакта играют флюксонные решения. Различные распределения магнитного потока в джозефсоновских контактах рассмотрены в обзоре [7]. В малых внешних полях  $h_e$  таковыми являются флюксон  $\Phi^1$ , антифлюксон  $\Phi^{-1}$  и связанные состояния  $\Phi^1\Phi^{-1}$  и  $\Phi^{-1}\Phi^1$ . При увеличении внешнего магнитного поля  $h_e$  появляются другие, более сложные устойчивые флюксонные состояния – двух-флюксонные  $\Phi^{\pm 2}$ , трех-флюксонные  $\Phi^{\pm 3}$  и т.д., а также их связанные состояния.

На рис. 2 демонстрируется деформация производных решений под влиянием параметра  $a_2$ . При  $a_2 = 0.5$  кривая внутреннего магнитного поля  $\varphi'(x)$  имеет в окрестности центра  $x = 0$  плато. Дальнейшее возрастание параметра  $a_2$  приводит к формированию двух максимумов магнитного поля. Тем самым, учет коэффициента  $a_2$  приводит к качественному изменению вида флюксонного распределения  $\Phi^1$ .

При изменении коэффициента  $a_2$  число флюксонов [7]

$$N(p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x) dx,$$

соответствующих распределению  $\Phi^1$ , сохраняется, т.е.,

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = 0.$$

Здесь и ниже через  $p = (l, a_1, a_2, h_e, \gamma)$  обозначена совокупность параметров задачи. При этом значение  $N[\Phi^1] = 1$ .

В свою очередь, при увеличении параметра  $a_2$  полный магнитный поток [7]

$$\Delta\varphi(p) = \varphi(l) - \varphi(-l)$$

для этого же решения стремится к  $2\pi$ , что соответствует полному магнитному потоку флюксона в бесконечном контакте  $\Phi^1_\infty = 4 \arctan \exp(x)$  при  $a_2 = 0$ . При этом

значение магнитного потока  $\varphi(x)$  в середине интервала не меняется, т.е.,  $\varphi(0) = \pi$ .

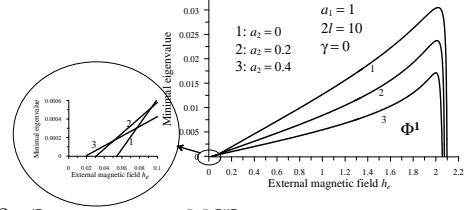


Рис. 3: Зависимость МСЗ от внешнего поля  $h_e$  для флюксонных решений  $\Phi^1$  при  $\gamma = 0$ ,  $a_1 = 1$  и нескольких значениях параметра  $a_2$ .

На рис. 3 показана зависимость МСЗ  $\lambda_{min}$  от внешнего тока  $\gamma$  для флюксонных решений вида  $\Phi^1$  при фиксированном значении параметра  $a_1 = 1$  и при разных положительных значениях параметра  $a_2$ . Указанная зависимость качественно аналогична той, что имеет место в традиционной модели с  $a_2 = 0$ , но величина максимального критического тока этого распределения в рассматриваемом случае меньше. При достаточно малых по модулю  $h_e$  флюксонные решения  $\Phi^1$  являются неустойчивыми. С увеличением значений параметра  $a_2$  (учет второй гармоники в токе Джозефсона) граница области устойчивости сдвигается в сторону меньших значений магнитного поля.

## References

- [1] Golubov A.A., Kupriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Rev. Mod. Phys. Apr 2004. V76. 411.
- [2] Ryazanov V.V. et al. Coupling of two superconductors through a ferromagnet: evidence for a pi junction // Phys. Rev. Lett. 2001. V36. 2427.
- [3] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.
- [4] Hatakenaka N.et. all Double sine-Gordon fluxons in isolated long Josephson junction // Physica B. 2000. 284-288. 563-564.
- [5] Buzdin A., Koshelev A.E. Periodic alternating 0-and  $\pi$ -junction structures as realization of  $\varphi$ -Josephson junctions // PRB. 2003. 67, 220504(R).
- [6] Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // Журн. exper. и теор. физ. 1984.86, вып. 4, 1527; Sov. Phys. JETP .1984.59, 894.
- [7] Puzynin I. V.et. all Methods of Computational Physics for Investigation of Models of Complex Physical Systems // Physics of Particles and Nuclei. 2007. Vol. 38, No. 1, 70–116.
- [8] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.