

# Моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов

П.Х. Атанасова,\* Т.Л. Бояджиев†

За последнее время свойства многослойных джозефсоновских контактов исследовались рядом авторов (см. библиографию в работах [1]). Такие структуры позволяют ставить и изучать ряд новых физических эффектов, не имеющих места для однослойных контактов, а также представляют значительный интерес для практических применений. В качестве конкретного примера укажем на недавно обнаруженный экспериментальным путем “эффект синхронизации критических токов” (CL) [2] в двухслойных джозефсоновских контактах (ДДК). Суть этого эффекта заключается в частичном совпадении кривых вида “критический ток-магнитное поле”, соответствующих отдельным слоям ДДК.

В работах [3, 4] сделана попытка объяснения CL-эффекта на основе интерпретации переходов из сверхпроводящего в резистивный режим работы отдельных слоев ДДК как бифуркации статических распределений магнитного потока в слоях при изменении приложенного магнитного поля и внешнего тока. Каждому распределению в конкретном слое ставится в соответствие регулярная задача Штурма-Лиувилля, собственные значения которой позволяют судить о парциальной устойчивости или неустойчивости распределения. Критические зависимости для каждого из слоев строятся как огибающие бифуркационных кривых, соответствующих конкретным распределениям. Численный эксперимент показывает, что при ненулевом коэффициенте взаимодействия между слоями на критических кривых слоев имеются скачки критических токов, соответствующих различным парам распределений в ДДК. Тем самым CL-эффект с математической точки зрения представляется обусловленным наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых.

Краевая задача для статических распределений магнитного потока  $\varphi(x)$  в ДДК имеет следующий вид

$$-A \varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (1a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H, \quad (1b)$$

Все величины записаны в безразмерном виде. В уравнениях (1) и далее по тексту нижним индексом  $x$  обозначена операция дифференцирования по пространственной координате. При подходящем выборе единиц величина  $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  есть 2-вектор статических магнитных потоков в “нижнем”  $\varphi_1(x)$  и “верхнем”  $\varphi_2(x)$  слоях (верхний индекс  $T$  используется для операции транспонирования).

В рассматриваемой симметрической модели ДДК матрица  $A(s)$  зависит только от константы связи  $s \in (-1, 0]$  между слоями. Вектор плотностей токов Джозефсона в отдельных слоях контакта определяется как  $J_z(\varphi) = (\sin \varphi_1, \sin \varphi_2)^T$ . 2-вектор  $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$ , где для простоты в дальнейшем предполагаем внешний ток  $\gamma = \text{const}$ , 2-вектор  $H = h_B(1, 1)^T$ .

Для изучения парциальной устойчивости распределений магнитного потока в  $i$ -ом слое при малых пространственно-временных возмущениях каждому распределению сопоставляется регулярная задача Штурма-Лиувилля

$$-a_{ii}\psi_{i,xx} + q_i(x) \psi_i = \mu_i \psi_i, \quad (2a)$$

$$\psi_{i,x}(\pm l) = 0, \quad (2b)$$

$$\int_{-l}^l \psi_i^2(x) dx - 1 = 0. \quad (2c)$$

---

\*E-mail: poli@jinr.ru

†E-mail: todorlb@jinr.ru

Потенциал  $q_i(x)$  определяется через конкретное решение  $\varphi_i(x)$  задачи (1) по формуле  $q_i(x) = \cos \varphi_i(x)$ .

На конечном отрезке  $[-l, l]$  задача вида (2) имеет ограниченный снизу дискретный спектр  $\mu_{i n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , причем  $\mu_{i 0} \geq -1$ . При этом каждому собственному значению  $\mu_{i n}$  отвечает единственная собственная функция  $\psi_{i n}(x)$ , для которой выполнено условие нормировки (2с). Число нулей  $\psi_{i n}(x)$  на отрезке  $(-l, l)$  равно номеру  $n$ . В частности, собственные функции  $\psi_{i 0}(x)$ , соответствующие минимальным собственным значениям  $\mu_{i 0}$  не имеют нулей.

При  $\mu_{i 0} > 0$  функционал суммы энергии  $i$ -ого слоя и энергии взаимодействия между слоями положительно определен. Тем самым распределение магнитного потока  $\varphi_i(x)$  является парциально устойчивым при заданном распределении в соседнем слое и заданном коэффициенте взаимодействия.

Бифуркационная зависимость “ток-магнитное поле” для распределения  $\varphi_i(x)$  представляет собой геометрическое место точек таких, что

$$\mu_{i 0}(h_B, \gamma) = 0. \quad (3)$$

Для фиксированного поля  $h_B$  в  $i$ -ом слое могут существовать несколько статических распределений с различными критическими токами. Критический ток слоя при заданном  $h_B$  есть наибольший из всех критических токов отдельных распределений. При этом, соответствующее распределение с наибольшим критическим током является наиболее энергетически выгодным. Геометрическое место точек с наибольшим критическим током представляет собой критическую кривую (КК) слоя. Ясно, что КК для каждого слоя представляет собой огибающую бифуркационных кривых (БК) для отдельных распределений в слое [3].

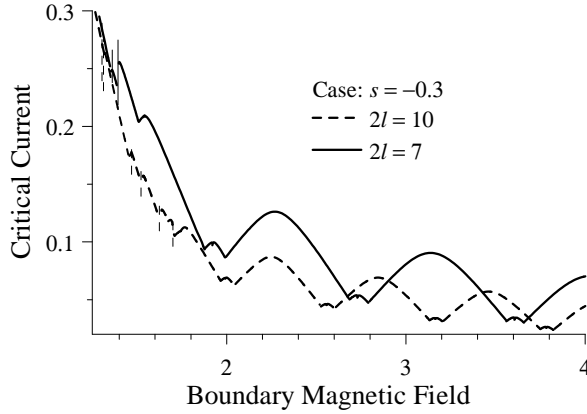


Рис. 1: Парциальные КК при  $s = -0.3$  для  $2l = 10$  и  $2l = 7$ .

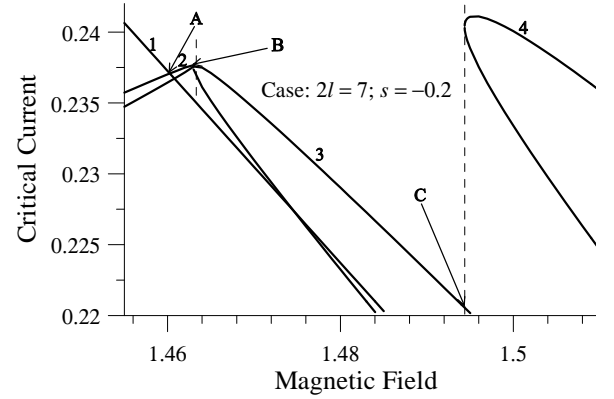


Рис. 2: Нарушения непрерывности парциальной КК для  $2l = 7$  и  $s = -0.2$ .

Для расчета БК вида (3) целесообразно рассматривать уравнения (1) и (2) при фиксированных значениях длины  $2l$  и параметра связи между слоями  $s$  как единую систему для неизвестных функций  $\varphi(x)$  и  $\psi_i(x)$ , зависящую от трех параметров  $h_B$ ,  $\gamma$  и  $\mu_i$ . Для замыкания системы необходимо задать два из этих трех параметров.

В “тривиальном” случае задаем величины  $h_B$  и  $\gamma$ . Тогда система расщепляется на две независимые подсистемы относительно переменных  $\varphi(x)$  и  $(\psi_i(x), \mu_i)$ , что эквивалентно проверке парциальной устойчивости решения  $\varphi_i(x)$ .

В остальных двух случаях, при заданных  $\gamma$  и  $\mu_i$  или  $h_B$  и  $\mu_i$ , система должна рассматриваться как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром  $h_B$  или  $\gamma$  соответственно. Алгоритм решения такой задачи основывается на непрерывном аналоге метода Ньютона. Для численного решения возникающих на каждой итерации линейных краевых задач применяется сплайн-коллокационная разностная схема повышенного порядка точности.

На Рис. 1 сравниваются полученные в численном эксперименте КК при коэффициенте взаимодействия между слоями  $s = -0.3$  и двух длинах  $2l = 10$  и  $2l = 7$  контакта. В отличие от случая

единичного ДК, на парциальных КК имеются точки разрыва непрерывности, представляющих собой скачки максимального критического тока  $\gamma$  для некоторых значений магнитного поля  $h_B$ . На Рис. 1 скачки отмечены вертикальными прямыми. Отметим, что при увеличении длины контакта ( $2l = 10$ ) число скачков тока растет, а их структура становится сложнее.

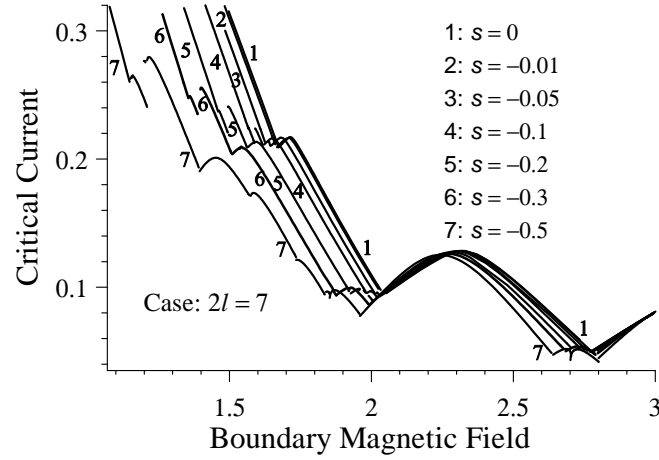


Рис. 3: КК при разных значениях параметра  $s$  для  $2l = 7$ .

Структура БК и возникновение точек разрыва непрерывности КК демонстрируется на Рис. 2 (подробности изложены в нашей работе [3]). При малых  $h_B$  доминирует БК с номером 1, которая соответствует симметричному меисснеровскому решению. При нарастании поля  $h_B$  в точке  $A$  происходит непрерывный переход на бифуркационную кривую 2. В отличие от точки  $A$  в точке  $B$  имеется скачок максимального критического тока с бифуркационной кривой 2 на БК с номером 3. При дальнейшем увеличении поля  $h_B$  в точке  $C$  снова имеется скачок критического тока с бифуркационной кривой 3 на бифуркационную кривую 4.

На Рис. 3 демонстрируется влияние параметра связи  $s$  на парциальную КК. Видно, что с уменьшением значения  $|s|$  критические кривые сдвигаются направо, а амплитуда скачков критического тока быстро уменьшается. Тем самым, КК при уменьшении  $|s|$  стремятся к положению, соответствующему независимым слоям ( $s = 0$ ).

## Список литературы

- [1] I.P. Nevirkovets, J.E. Evetts, and M. Blamire, Phys. Lett. A **187**, 119 (1994); E. Goldobin, H. Kohlstedt, and A.V. Ustinov, Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators, Appl. Phys. Lett. 68 (2) (1996), pp. 250–252; V.M. Krasnov and D. Winkler, Static and dynamic properties of stacked Josephson junctions: Analytic solution, Phys. Rev. B, v. **56**, 1997, pp. 9106 – 9115.
- [2] E. Goldobin, A.V. Ustinov, Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions, Phys. Rev. B, 59 (17), 1999, pp. 11532–11538.
- [3] П.Х. Атанасова, С.Н. Димова, Т.Л. Бояджиев, Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов, Сообщение ОИЯИ, P11-2005-16.
- [4] П.Х. Атанасова, Т.Л. Бояджиев, Построение критических кривых для симметричных двухслойных джозефсоновских контактов, Препринт ОИЯИ, P11-2005-143.