

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ МАГНИТНОГО ПОТОКА В
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДВОЙНЫМ
УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON

П.Х. Атанасова¹, Т.Л. Бояджиев², Е.В. Земляная³, Ю.М. Шукринов⁴

Аннотация.

Целью работы является математическое моделирование статических распределений магнитного потока в длинных джозефсоновских контактах с учетом второй гармоники в разложении джозефсоновского тока в ряд Фурье. Найдены основные распределения магнитного потока и исследована их устойчивость при изменении параметров модели. Проведено сравнение полученных результатов с результатами традиционной модели для джозефсоновских контактов типа SIS.

Ключевые слова. Длинный джозефсоновский контакт, флюксонные решения, устойчивость, ньютоновская схема, сплайн-коллокация

1. Постановка задачи.

Многообразие физических свойств джозефсоновских контактов является основой современной сверхпроводящей электроники. Известно, что для туннельных джозефсоновских контактов типа SIS (сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник) зависимость ток-разность фаз является синусоидальной функцией. При уменьшении прозрачности барьера возможно отклонение от этой зависимости, которое в достаточно общем случае выражается нечетной функцией, т.е., может рассматриваться в виде разложения в ряд Фурье [1] по синусам. Учет высших гармоник в этом разложении существен, например, в контактах типа SNINS и SFIFS, где N это нормальный металл, а F – ферромагнетик [2].

В монографии [3] показано, что для достаточно широкого класса джозефсоновских контактов сверхпроводящий ток Джозефсона как функция магнитного потока φ (разности фаз волновых функций сверхпроводников) может быть представлен в виде ряда по синусам. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в этом разложении, нетрудно показать [4], что распределение величины $\varphi(x)$ вдоль оси x контакта в статическом режиме [3] удовлетворяет двойному уравнению sine-Gordon (далее для краткости используем сокращение 2SG)

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, x \in (-l; l). \quad (1)$$

Здесь и ниже штрихом обозначено дифференцирование по координате x . Величина γ есть внешний ток, l есть полудлина контакта, а a_1 и a_2 — параметры, зависящие от технологии изготовления контакта [1, 5]. Все величины являются безразмерными.

В случае in-line геометрии контакта граничные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (2)$$

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: poli@jinr.ru

²Софийский Университет “Климент Охридски”, София, Болгария; Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: todorlb@jinr.ru

³Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: elena@jinr.ru

⁴Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: shukrinv@theor.jinr.ru

где h_e внешнее магнитное поле.

С математической точки зрения переход контакта в динамический режим [3] рассматривается [6, 7] как потеря устойчивости (бифуркация) некоторого из статических решений $\varphi(x)$ задачи (1), (2) при варьировании одного из параметров γ или h_e . При этом минимальное собственное значение (МСЗ) λ_{min} , порожденной этим решением задачи Штурма-Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad \psi'(\pm l) = 0 \quad (3)$$

с потенциалом $q(x) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$, обращается в нуль.

2. Численный метод. Численное решение граничной задачи (1),(2) проводилось на основе непрерывного аналога метода Ньютона [7]. На каждом итерационном шаге ньютоновской схемы соответствующая линейаризованная задача решалась с использованием сплайн-коллокационной разностной схемы второго порядка точности [8]. Дискретизация ЗШТЛ (3) осуществлялась с помощью конечно-разностных формул второго порядка. Для вычисления первых нескольких собственных значений полученной алгебраической трехдиагональной задачи применялась стандартная подпрограмма пакета EISPACK.

3. Численные результаты и выводы.

Учет второй гармоники $a_2 \sin 2\varphi$ приводит к тому, что для $\gamma = 0$ и $h_e = 0$, кроме известных в традиционном случае ($a_2 = 0$) тривиальных решений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (ниже обозначаются через M_0 и M_π , соответственно), существуют еще два решения $\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2)$ (обозначаемые как $M_{\pm ac}$). Соответствующие МСЗ как функции коэффициентов 2SG-уравнения имеют вид $a_1 + 2a_2$, $-a_1 + 2a_2$ и $(a_1^2 - 4a_2^2)/2a_2$ соответственно. Экспоненциальная устойчивость этих константных решений (КР) определяется знаками параметров a_1 и a_2 и отношением параметров a_1/a_2 .

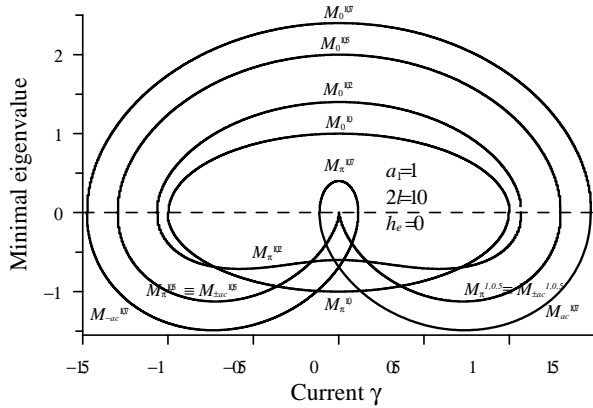


Рис. 1: Зависимость МСЗ λ_{min} от внешнего тока γ для КР при фиксированных значениях $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$ и при разных значениях параметра a_2 .

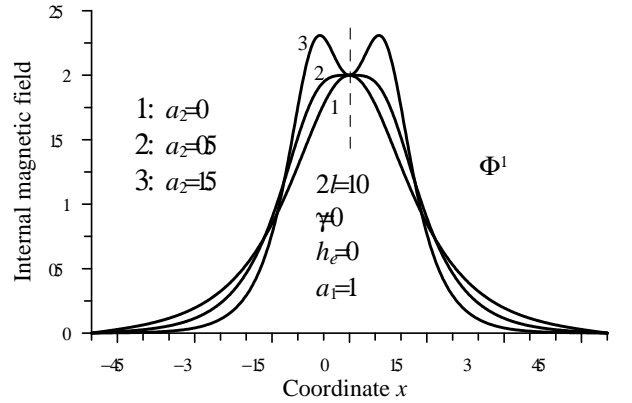


Рис. 2: Флюксон Φ^1 при $\gamma = 0$, $h_e = 0$ и $a_1 = 1$ при изменении параметра a_2 .

На рис. 1 демонстрируются зависимости величины λ_{min} от внешнего тока γ для КР при нескольких положительных значениях параметра a_2 . Хорошо просматривается рождение устойчивых состояний $M_{\pm ac}$ внешним током γ при $a_2 > 0.5$.

Важную роль для физики контакта играют флюксонные решения. Различные распределения магнитного потока в джозефсоновских контактах рассмотрены в обзоре

[7]) В малых внешних полях h_e таковыми являются флюксон Φ^1 , антифлюксон Φ^{-1} и связанные состояния $\Phi^1\Phi^{-1}$ и $\Phi^{-1}\Phi^1$. При увеличении внешнего магнитного поля h_e появляются другие, более сложные устойчивые флюксонные состояния – двух-флюксонные $\Phi^{\pm 2}$, трех-флюксонные $\Phi^{\pm 3}$ и т.д., а также их связанные состояния.

Проведем сравнение некоторых основных физических характеристик однофлюксонного решения Φ^1 в модели (1), (2) с традиционным случаем ($a_1 = 1$, $a_2 = 0$). На рис. 2 демонстрируется деформация производных решений под влиянием параметра a_2 . При $a_2 = 0.5$ кривая внутреннего магнитного поля $\varphi'(x)$ имеет в окрестности центра $x = 0$ плато. Дальнейшее возрастание параметра a_2 приводит к формированию двух максимумов магнитного поля. Тем самым, учет коэффициента a_2 приводит к качественному изменению вида флюксонного распределения Φ^1 .

При изменении коэффициента a_2 число флюксонов [7]

$$N(p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x) dx,$$

соответствующих распределению Φ^1 , сохраняется, т.е.,

$$\frac{\partial N}{\partial a_2} = 0.$$

Здесь и ниже через $p = (l, a_1, a_2, h_e, \gamma)$ обозначена совокупность параметров задачи. При этом значение $N[\Phi^1] = 1$.

В свою очередь, при увеличении параметра a_2 полный магнитный поток [7]

$$\Delta\varphi(p) = \varphi(l) - \varphi(-l)$$

для этого же решения стремится к 2π , что соответствует полному магнитному потоку флюксона в бесконечном контакте $\Phi_\infty^1 = 4 \arctan \exp(x)$ при $a_2 = 0$. При этом значение магнитного потока $\varphi(x)$ в середине интервала не меняется, т.е., $\varphi(0) = \pi$.

Полная энергия, связанная с распределением $\varphi(x)$, вычисляется по формуле [7]

$$F(p) = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} \varphi'^2 + 1 - q(x) - \gamma\varphi \right] dx - h_e \Delta\varphi.$$

Численный эксперимент показывает, что для однофлюксонного распределения Φ^1 функция $F(a_2)$ убывает примерно по линейному закону при возрастании a_2 , что демонстрируется на Рис. 3. При этом в нулевом внешнем поле ($h_e = 0$) и при нулевом токе ($\gamma = 0$) энергия $F(a_2 \rightarrow 0) \rightarrow 1$, что соответствует энергии единичного флюксона Φ_∞^1 в традиционной модели “бесконечного” контакта при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

На рис. 4 показана зависимость МСЗ λ_{min} от внешнего тока γ для флюксонных решений вида Φ^1 при фиксированном значении параметра $a_1 = 1$ и при разных положительных значениях параметра a_2 . Указанная зависимость качественно аналогична той, что имеет место в традиционной модели с $a_2 = 0$, но величина максимального критического тока этого распределения в рассматриваемом случае меньше. При достаточно малых по модулю h_e флюксонные решения Φ^1 являются неустойчивыми. С увеличением значений параметра a_2 (учет второй гармоники в токе

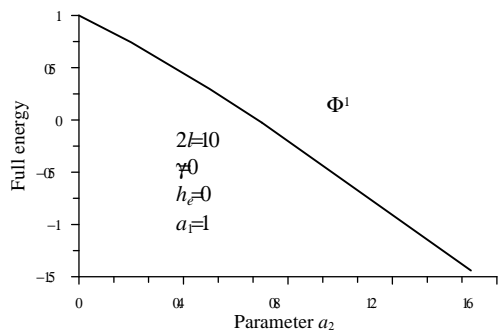


Рис. 3: Зависимость полной энергии от параметра a_2 для флюксонного решения Φ^1 при фиксированных значениях $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$.

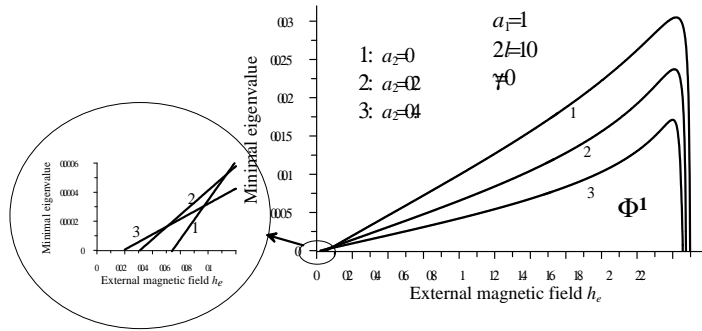


Рис. 4: Зависимость МСЗ от внешнего поля h_e для флюксонных решений Φ^1 при $\gamma = 0$, $a_1 = 1$ и нескольких значениях параметра a_2 .

Джозефсона) граница области устойчивости сдвигается в сторону меньших значений магнитного поля.

Благодарности. Авторы благодарят И.В.Пузынина и Т.П.Пузынину за поддержку данной работы и ценные замечания. Работа П.Х.А. частично финансировалась Программой сотрудничества ОИЯИ с болгарскими научными центрами “ОИЯИ – Болгария”. Работа Т.Л.Б. частично финансировалась грантом № 39/2009 Университета “Св. Кл. Охридски” (Болгария). Е.В.З. и Ю.М.Ш. благодарят РФФИ (гранты соответственно № 09-01-00770-а и № 08-02-00520-а) за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] Golubov A.A., Kypriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Rev. Mod. Phys. Apr 2004. V76. 411.
- [2] Ryazanov V.V., Oboznov V.A., Rusanov A.Yu. et al. Coupling of two superconductors through a ferromagnet: evidence for a pi junction // Phys. Rev. Lett. 2001. V36. 2427.
- [3] Лухарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1985.
- [4] Hatakenaka N., Takayanag H., Kasai Yo., Tanda S. Double sine-Gordon fluxons in isolated long Josephson junction // Physica B. 2000. 284-288. 563-564.
- [5] Buzdin A., Koshelev A.E. Periodic alternating 0-and π -junction structures as realization of φ -Josephson junctions // PRB. 2003. 67, 220504(R).
- [6] Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // Журн. exper. и теор. физ. 1984.86, вып. 4, 1527; Sov. Phys. JETP .1984.59, 894.
- [7] Puzynin I. V., Boyadzhiev T. L., Vinitskii S. I., Zemlyanaya E. V., Puzynina T. P., and Chuluunbaatar O. Methods of Computational Physics for Investigation of Models of Complex Physical Systems // Physics of Particles and Nuclei. 2007. Vol. 38, No. 1, 70–116.

- [8] *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.