

Построение критических кривых для симметричных двухслойных джозефсоновских контактов

П. Х. Атанасова*, Т. Л. Бояджиев*, Л. А. Севастьянов†

* Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

† Кафедра систем телекоммуникаций,
Российский университет дружбы народов,
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В настоящей работе проведено численное моделирование критических зависимостей вида «ток–магнитное поле» в двухслойном симметричном стеке индуктивно связанных джозефсоновских контактов. Для этой цели переходы из сверхпроводящего в резистивный режим работы отдельных слоев контакта математически интерпретируются как бифуркации статических распределений магнитного потока в слое при изменении приложенного магнитного поля и внешнего тока [1, 2]. Каждому распределению в конкретном слое ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля, собственные значения которой позволяют судить о парциальной устойчивости или неустойчивости распределения. Критические зависимости для каждого из слоев строятся как огибающие бифуркационных кривых, соответствующих конкретным распределениям. С математической точки зрения эффект «синхронизации критических токов» (curent locking), обнаруженный недавно в эксперименте [3, 4] может быть обусловлен наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых.

1. Постановка задачи

Изучению свойств двухслойных индуктивно связанных джозефсоновских контактов (далее используем сокращение ДК) во внешних магнитных полях исследовались за последнее время многими авторами (см., например, [3]– [5]). Такие ДК представляют, с одной стороны, значительный интерес с точки зрения практических применений, например, в качестве высокочастотных осцилляторов. С другой стороны, модели связанных ДК описываются сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений, что позволяет ставить и изучать ряд новых физических эффектов, не имеющих места для «традиционных» однослойных ДК.

На рис. 1 показана схема двухслойного ДК. Контакт состоит из трех сверхпро-

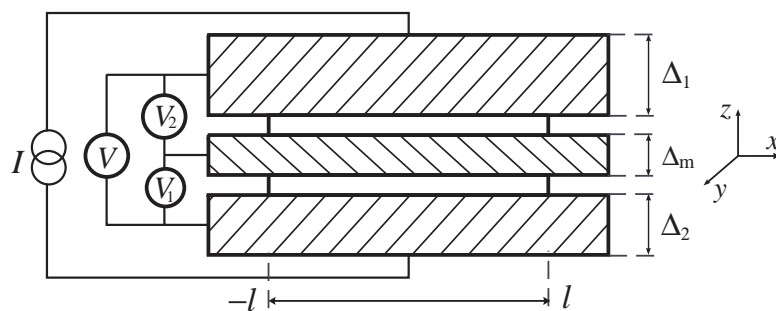


Рис. 1. Схема двухслойного ДК.

водящих электродов толщиной Δ_1 , Δ_m , Δ_2 , которые разделены тонкими барьерными слоями. Структура находится в однородном статическом магнитном поле h_B , направленное по оси y (все используемые здесь и ниже величины безразмерны [6]).

Если оба слоя «работают» в джозефсоновском режиме (при заданном h_B ток через структуру меньше некоторого критического значения), то напряжения, измеряемые на слоях $V_1(t) = 0$ и $V_2(t) = 0$ (см. рис. 1). Если один или оба слоя вышли на резистивный режим, то $V_1(t) \neq 0$ и/или $V_2(t) \neq 0$ и по закону Ома полное напряжение $V(t)$, измеряемое на структуре $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$. Здесь напряжения $V_i(t)$, $i = 1, 2$, на отдельных слоях определяются в соответствии с соотношениями Джозефсона

$$V_i(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi_{i,t}(t, x) dx. \quad (1)$$

Здесь $\phi_i(t, x)$ — зависящая от времени t и координаты x разность фаз волновых функций сверхпроводников i -ого слоя. При подходящей нормировке [1] величину $\phi_i(t, x)$ можно интерпретировать как безразмерный магнитный поток. Нижним индексом t обозначено дифференцирование по времени.

Математически в рамках линейной теории устойчивости переход одного из слоев ДК с джозефсоновского в резистивный режим будем рассматривать [5] как бифуркацию некоторого статического распределения магнитного потока в слое при изменении внешнего магнитного поля и внешнего тока. При этом устойчивым относительно малых пространственно-временных возмущений статическим распределением соответствует джозефсоновский режим слоя (показание соответствующего вольтметра на рис. 1 равно нулю). При заданном внешнем магнитном поле h_B всякому устойчивому статическому распределению соответствует некий максимальный (критический) ток, при достижении которого распределение теряет устойчивость и переходит в зависящее от времени (неустойчивое) распределение. Если в слое нет других устойчивых энергетически более выгодных статических распределений с большим критическим током, то в результате на слое (и контакте) возникает ненулевое напряжение в силу формулы (1). В рамках традиционной модели одномерного длинного ДК такой подход был впервые предложен в классической работе [1].

Нелинейная краевая задача, соответствующая статической модели индуктивно связанных слоев [4], может быть записана в виде

$$-A \varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (2a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H. \quad (2b)$$

В уравнениях (2) и далее по тексту нижним индексом x обозначена операция дифференцирования по пространственной координате. При подходящем выборе единиц величина $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ есть 2-вектор статических магнитных потоков в «нижнем» $\varphi_1(x)$ и «верхнем» $\varphi_2(x)$ слоях (верхний индекс T обозначает транспонирование).

Элементы симметрической квадратной 2-матрицы A определяются через физические константы материалов электродов и их толщин Δ_1 , Δ_m и Δ_2 (явные выражения приведены в статье [6]). Далее в настоящей работе ограничимся рассмотрением модели двухслойного ДК, отдельные слои которого идентичны. Тогда матрица $A(s)$ зависит только от константы связи $s \in (-1, 0]$ между слоями. Вектор плотностей токов Джозефсона в отдельных слоях контакта определяется как $J_z(\varphi) = (\sin \varphi_1, \sin \varphi_2)^T$, 2-вектор $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$, где для простоты в дальнейшем предполагаем внешний ток $\gamma = \text{const}$, 2-вектор $H = h_B(1, 1)^T$. Отметим, что решения (2) зависят гладким образом как от физической координаты x , равно и от параметров l , s , h_B и γ , т. е., $\varphi = \varphi(x, p)$, где через $p \equiv \{l, s, h_B, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ обозначен 4-вектор параметров модели.

Полная энергия контакта есть сумма $F[\varphi] = F_1 + F_2 + F_{12}$ энергий F_i невзаимодействующих слоев и энергии связи F_{12} между слоями [5].

Парциальная устойчивость распределений в слоях ДК

Для изучения парциальной устойчивости распределений магнитного потока в i -ом слое исследуется [5] характер экстремума суммы $F_i + F_{12}$ энергии i -ого слоя и энергии взаимодействия. При этом каждое распределение порождает регулярную задачу Штурма–Лиувилля (ЗШЛ) с условиями Неймана на концах

$$-a_{ii}\psi_{i,xx} + q_i(x)\psi_i = \mu_i\psi_i, \quad (3a)$$

$$\psi_{i,x}(\pm l) = 0, \quad (3b)$$

$$\int_{-l}^l \psi_i^2(x) dx - 1 = 0, \quad (3c)$$

потенциал которой определяется через решение $\varphi_i(x)$ как $q_i(x) = \cos \varphi_i(x)$. На конечном отрезке $[-l, l]$ задача вида (3) имеет ограниченный снизу дискретный спектр. При этом каждому собственному значению (СЗ) μ_{in} отвечает единственная собственная функция (СФ) $\psi_{in}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для которой выполнено условие нормировки (3с). Бифуркационная зависимость «ток–магнитное поле» (бифуркационная кривая) для распределения $\varphi_i(x)$ представляет собой геометрическое место точек на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, таких, что

$$\mu_{i0}(h_B, \gamma) = 0. \quad (4)$$

Для фиксированного h_B в слое могут существовать несколько статических распределений с различными критическими токами. Критическим током слоя при заданном h_B будем называть наибольший из всех критических токов отдельных распределений. Геометрическое место точек с наибольшим критическим током будем соответственно называть критической кривой (КК) слоя.

Для расчета БК вида (4) удобно применять алгоритм, предложенный в работах [7]. Будем рассматривать уравнения (2) и (3) при фиксированных значениях длины $2l$ и параметра связи между слоями s как единую систему для неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi_i(x)$, зависящую от трех параметров h_B , γ и μ_i . В систему входят 3 дифференциальных уравнения второго порядка. Следовательно, для того, чтобы система была замкнутой, необходимо задать два из этих трех параметров.

В «тривиальном» случае задаем величины h_B и γ . Тогда система расщепляется на две независимые подсистемы относительно переменных $\varphi(x)$ и $(\psi_i(x), \mu_i)$, что эквивалентно проверке устойчивости решения $\varphi(x)$.

В остальных двух случаях, при заданных γ и μ_i или h_B и μ_i , система должна рассматриваться как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром h_B или γ соответственно. Величину $\mu_i \geq -1$ можно задавать достаточно произвольно, но точкам бифуркации нулевого порядка [2, 5] соответствует значение $\mu_i = 0$.

Пусть в качестве спектрального выбран параметр h_B . Предполагая существование изолированного решения $\{\varphi(x), \psi_i(x), h_B\}$, для решения указанной выше задачи целесообразно применять итерационный алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона [8].

Пусть $\{\varphi^0(x), \psi_i^0(x), h_B^0\}$ — начальное приближение к точному решению. Тогда

1) На n -той итерации ($n = 1, 2, \dots$), решаем линейные краевые задачи (индекс итераций опускаем для упрощения записи)

$$-AU_{xx} + Q(x)U = A\varphi_{xx}(x) - J_z(\varphi(x)) - \Gamma, \quad (5a)$$

$$U_x(\pm l) = h_B - \varphi_x(\pm l), \quad (5b)$$

$$-AV_{xx} + Q(x)V = 0, \quad (5c)$$

$$V_x(\pm l) = 1; \quad (5d)$$

относительно 2-вектор функций $U(x) = (U_1(x), U_2(x))^T$ и $V(x) = (V_1(x), V_2(x))^T$.
Здесь 2-матрица $Q(x) = \text{diag}(\cos \varphi_1(x), \cos \varphi_2(x))$;

2) Вычисляем скалярные функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ как решения линейных краевых задач

$$\begin{aligned} & -a_{ii}\Psi_{xx} + [\cos \varphi_i(x) - \mu_i] \Psi^n = \\ & = a_{ii}\psi_{i,xx}(x) + [\cos \varphi_i(x) - \mu_i] \psi_i(x) + \sin \varphi_i(x) \psi_i(x) U(x), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\Psi_x(\pm l) = -\psi_{i,x}(\pm l); \quad (6b)$$

$$-a_{ii}\Phi_{xx} + [\cos \varphi_i(x) - \mu_i] \Phi = \sin \varphi_i(x) \psi_i(x) V(x), \quad (6c)$$

$$\Phi_x(\pm l) = 0; \quad (6d)$$

3) Из уравнения

$$\chi = \left(2 \int_{-l}^l \psi_i V_1 dx \right)^{-1} \left(1 - \int_{-l}^l \psi_i^2 dx - 2 \int_{-l}^l \psi_i U_1 dx \right) \quad (7)$$

вычисляем приращение параметра h_B на текущей итерации;

4) Очередное приближение к точному решению находим по формулам

$$\varphi^n(x) = \varphi^{n-1}(x) + \tau_n [U^n(x) + \chi^n V^n(x)], \quad (8a)$$

$$\psi_i^n(x) = \psi_i^{n-1}(x) + \tau_n [\Psi^n(x) + \chi^n \Phi^n(x)], \quad (8b)$$

$$h_B^n = h_B^{n-1} + \tau_n \chi^n. \quad (8c)$$

Итерационный параметр τ_n вычисляется по формуле Ермакова – Калиткина [8].

Для численного решения линейных краевых задач (5) и (6) применяется разностная схема на основе метода сплайн-коллокации [2]. Отметим, что дифференциальные выражения в левых частях (5) и (6) одинаковы, что позволяет обращаться только один раз матрицы линейных систем алгебраических уравнений, полученных вследствие дискретизации.

2. Некоторые численные результаты

На рис. 2–4 сравниваются полученные в численном эксперименте КК при коэффициенте взаимодействия между слоями $s = -0.3$, $s = -0.5$ и $s = -0.6$ в контакте длиной $2l = 7$. В отличие от случая единичного ДК, на парциальных КК имеются точки разрыва непрерывности, представляющих собой скачки максимального критического тока γ для некоторых значений магнитного поля h_B .

Для описания решений используем обозначения: M — мейсснеровское решение, Φ^n — n -флюксонной вихрь, B — бризер (подробности изложены в нашей работе [5]). Число вихрей (флюксонов) в распределении $\varphi_i(x)$ вычисляется по формуле [2, 5]

$$n[\varphi_i] = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi_i(x) dx.$$

При малых h_B доминирует БК, обозначенная номером 1. Она соответствует симметричному решению ($\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$) вида (M, M) . При нарастании поля h_B в точке A происходит непрерывный переход на бифуркационную кривую 2. В отличие от точки A в точке B имеется скачок максимального критического тока с бифуркационной кривой 2 на БК с номером 3. При дальнейшем увеличении поля h_B в точке C снова имеется скачок с бифуркационной кривой 3 на бифуркационную

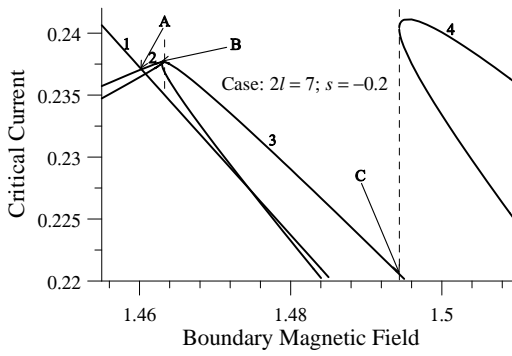


Рис. 2. Нарушения непрерывности частичной КК для $2l = 7$ и $s = -0.2$.

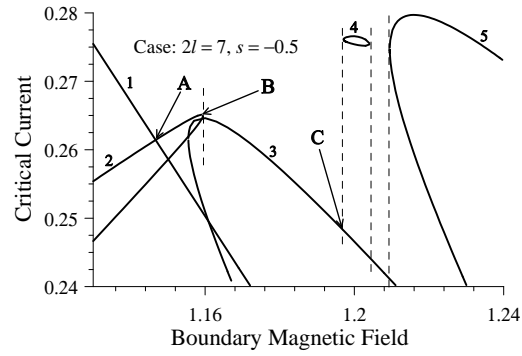


Рис. 3. Нарушения непрерывности частичной КК для $2l = 7$ и $s = -0.5$.

кривую 4. Решения, соответствующие указанным кривым 2, 3, 4 и 5 несимметричны ($\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$) и представляют собой некоторые из пар вида (M, Φ) , (Φ, M) , (M, B) или (B, M) .

При возрастании величины $|s|$ области существования по параметрам h_B и γ решения 4 также увеличивается, что показано на рис. 4. При этом соответствующая БК 4 пересекается с БК 5 в точке D (см. рис. 4), в результате чего структура скачков меняется. Отметим, что при небольших значениях параметра связи s решения, соответствующие БК 4 от рис. 3 и рис. 4, не обнаружены в численном эксперименте, что говорит о наличии бифуркаций решений задачи (2) по параметру s .

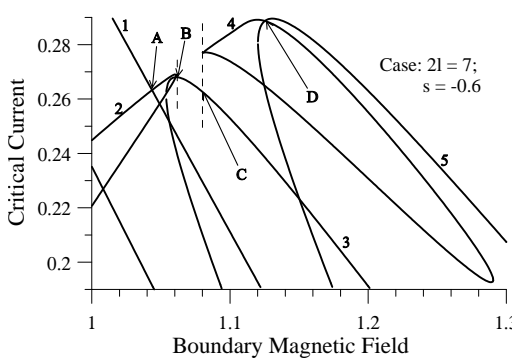


Рис. 4. Нарушения непрерывности частичной КК для $2l = 7$ и $s = -0.6$.

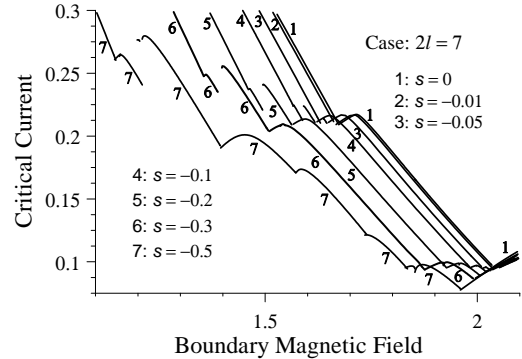


Рис. 5. КК ДК при разных значениях параметра s для $2l = 7$.

На рис. 5 демонстрируется влияние параметра связи s на частичную КК. Видно, что с уменьшением значения $|s|$ критические кривые сдвигаются направо, а амплитуда скачков критического тока быстро убывает. Тем самым, КК при уменьшении $|s|$ стремятся к положению, соответствующему независимым слоям ($s = 0$).

Представленные результаты демонстрируют, что с математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [3, 4], могут быть обусловлены наличием точек разрыва непрерывности частичных критических кривых. Положение и величина разрывов зависит от выбора модели и значений параметров.

Отметим, что методы настоящей работы легко переносятся на более сложные слоистые сверхпроводящие структуры.

Благодарности

Авторы выражают благодарность проф. Л.Н. Булаевскому (Лос-Аламос, США) проф. Э. Голдобину (Тюбинген, Германия), проф. Е.П. Жидкову и проф. И.В. Пузынину (ОИЯИ, Дубна, Россия) за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. Гальперин Ю. С., Филиппов А. Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ. — Т. 86, № 4. — С. 1527.
2. Бояджиев Т. Л. Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики: Дисс. ... канд физ.-мат наук / ОИЯИ. — Дубна, 2002.
3. Nevirkovets I. P., Evetts J. E., Blamire M. G. Transition From Single Junction to Double Junction Behavior in Sisis- Type Nb-Based Devices // Phys. Lett. A. — 1994. — Vol. 187. — P. 119.
4. Goldobin E., Ustinov A. V. Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59, No 17. — P. 11532–11538.
5. Атанасова П. Х., Димова С. Н., Бояджиев Т. Л. Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов: Сообщение P11-2005-16 / ОИЯИ. — Дубна, 2005.
6. Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // J. Appl. Phys. — 1993. — Vol. 73, No 5. — P. 2411–2418.
7. Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В. Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе: Сообщение P11-88-409 / ОИЯИ. — Дубна, 1988.
8. Puzynin I. V. et al. The generalised continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei. — 1999. — Vol. 30, No 1. — P. 97.

UDC 621.378.826.535 8

Modelling the critical dependencies in two-layered Josephson junctions

P. H. Atanasova *, T.L. Boyadjiev *, L.A. Sevastianov †

* Joint Institute of Nuclear Researches, Dubna

† Telecommunication Systems Department,
Peoples' Friendship University of Russia,
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this work a numerical modelling of the critical current as a function of applied magnetic field in a two-layer symmetric inductive coupled Josephson stack is presented. For this purpose the crossover between superconducting and resisting regimes of each of the layers are mathematically interpreted as bifurcations of the magnetic flux in the layer [1, 2]. A magnetic configuration in one of the layers corresponds to a partial scalar Sturm–Liouville problem, which eigenvalues are related to the stability of the system. A critical curve of the layer is obtained as an envelope curve of the bifurcation curves corresponding to different magnetic field distributions. From a mathematical point of view some of the effects, received in experiment [3, 4], are connected to discontinuity points in partial critical curves.