

УДК 519.634

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ<sup>1)</sup>

© 2006 г. П. Х. Атанасова\*, Т. Л. Бояджиев\*, С. Н. Димова\*\*

(\*141980 Дубна, ОИЯИ, Россия;

\*\*Софийский ун-т “Св. Кл. Охридский”, София 1164, Болгария)

e-mail: poli@jinr.ru; todorlb@jinr.ru; dimova@fmi.uni.sofia.bg

Проведено моделирование парциальных критических зависимостей вида ток-магнитное поле в двухслойном симметричном джозефсоновском контакте. Численный эксперимент показывает, что при ненулевом коэффициенте взаимодействия между слоями контакта на критических кривых могут иметь место скачки критических токов, соответствующих различным распределениям магнитных потоков в слоях. Это позволяет интерпретировать математически особенности некоторых недавних экспериментальных результатов для двухслойных контактов как результат наличия точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых.

**Ключевые слова:** двухслойные джозефсоновские контакты, система уравнений синус-Гордон, задача Штурма–Лиувилля, парциальная устойчивость и бифуркации статических решений, нелинейные спектральные задачи, критические кривые, непрерывный аналог метода Ньютона, метод конечных элементов.

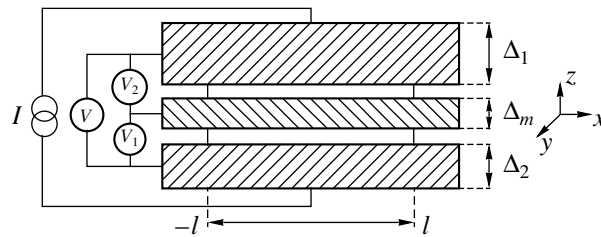
### 1. ВВЕДЕНИЕ

За последнее время свойства многослойных (и, в частности, двухслойных) джозефсоновских контактов (ДК) исследовались рядом авторов (см., например, [1]–[11]). Такие структуры позволяют ставить и изучать ряд новых физических эффектов, не имеющих места для однослойных ДК, а также представляют значительный интерес для практических применений.

Одним из наиболее интересных результатов, экспериментально обнаруженных за последние годы, является эффект, называемый “синхронизацией критических токов” (current locking) (см. [4], [5]). Суть эффекта заключается в совпадении на некоторых участках парциальных критических кривых вида ток-магнитное поле для двухслойных ДК. Тем самым на экспериментальных кривых наблюдаются скачки критического тока, соответствующие фиксированным значениям внешнего магнитного поля.

В настоящей работе проведено численное моделирование критических кривых в рамках модели индуктивно связанных слоев ДК на основе идей теории парциальной устойчивости (см. [12], [13]). Для этой цели переходы из сверхпроводящего в резистивный режим работы слоев контакта математически интерпретируются как бифуркации статических распределений магнитного потока при изменении параметров – приложенного магнитного поля и внешнего тока. В рамках традиционной модели одномерного длинного ДК такой подход был впервые применен в классической работе [14]. Каждому статическому распределению в конкретном слое ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля, собственные значения которой позволяют судить о парциальной устойчивости или неустойчивости распределения. При таком подходе критический ток распределения – это то значение внешнего тока, при котором соответствующее минимальное собственное значение обращается в ноль для заданных прочих параметров и, в частности, внешнего магнитного поля. Так как для заданного поля соответствующая нелинейная краевая задача модели может иметь более чем одно статическое решение, то критический ток слоя – это наибольший из критических токов распределений в слое, а критический ток структуры как целое – меньший из критических токов слоев. Парциальные критические зависимости для каждого из слоев строятся как огибающие бифуркационных кривых отдельных распределений.

<sup>1)</sup> Работа С.Н. Димовой частично финансирована УФНИ (грант № 421/2005).



Фиг. 1.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках модели длинных ДК, учитывающей только индуктивное взаимодействие между соседними слоями, динамика магнитного потока в ДК длины  $2l$  описывается в [2] смешанной задачей для системы возмущенных уравнений типа синус-Гордон:

$$\phi_{tt} + \alpha\phi_t - A\phi_{xx} + J_z(\phi) + \Gamma = 0, \quad t > 0, \quad x \in (-l, l), \quad (1a)$$

$$\phi_x(t, \pm l) = H; \quad (1b)$$

Здесь через  $t$  и  $x$  обозначены время и пространственная координата вдоль контакта (все используемые здесь и ниже величины безразмерны; о способах приведения к безразмерному виду см., например, [2], а также монографию [15]). Соответствующим нижним индексом обозначена операция дифференцирования. Величина  $\phi(t, x) = (\phi_1, \phi_2)^T$  есть вектор магнитных потоков в “нижнем”  $\phi_1(t, x)$  и “верхнем”  $\phi_2(t, x)$  слоях. Постоянная  $\alpha \geq 0$  представляет собой коэффициент диссипации. Далее ограничимся рассмотрением случая симметричного двухслойного ДК, отдельные слои которого идентичны и, в частности, толщины слоев  $\Delta_1 = \Delta_m = \Delta_2$  (см. фиг. 1). Тогда вектор плотностей тока Джозефсона определяется как  $J_z(\phi) = (\sin\phi_1, \sin\phi_2)^T$ . Вектор внешнего тока  $\Gamma = \Gamma(1, 1)^T$ , где для простоты в дальнейшем полагаем  $\gamma = \text{const}$ . Верхний индекс  $t$  означает операцию транспонирования. Аналогично, вектор  $H = h_B(1, 1)^T$ , а постоянная  $h_B$  представляет собой внешнее магнитное поле, направленное вдоль оси  $y$  в плоскости контакта. Квадратная симметрическая матрица  $A(s)$  зависит только от параметра связи  $s \in (-1, 0]$ :

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналитическое выражение величины  $s$  через гиперболические функции приведено, например, в [2].

Для дальнейших рассмотрений конкретные выражения для начальных условий в момент  $t = 0$  несущественны и поэтому здесь не приводятся.

Отметим, что уравнение (1) относится к градиентному (вариационному) виду. Так как краевые условия в точках  $x = \pm l$  не зависят явным образом от времени  $t$ , то полная энергия ДК (функционал Ляпунова)

$$E(t) = \int_{-l}^l \left\{ \frac{1}{2} [\phi_t^2 + \langle \phi_x, A\phi_x \rangle] + U(\phi) \right\} dx + \langle AH, \Delta\phi \rangle,$$

связанная с конкретным ограниченным решением  $\phi(t, x)$ , убывает во времени

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \int_{-l}^l \phi_t^2(t, x) dx \leq 0. \quad (2)$$

Угловыми скобками  $\langle a, b \rangle$  здесь и ниже обозначена операция скалярного произведения векторов  $a$  и  $b$ . Плотность токов  $U(\phi)$  определяется через градиент  $U'_\phi(\phi) = J_z(\phi) + \Gamma$ , что дает  $U(\phi) = 2 - \cos\phi_1 - \cos\phi_2 + \gamma(\phi_1 + \phi_2)$ . Величина  $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \Delta\phi_2)^T$  есть вектор полного магнитного потока:

$$\Delta\phi = \phi(l) - \phi(-l). \quad (3)$$

Из соотношения (2) вытекает, что любое нестационарное решение  $\phi(t, x)$  уравнения (1) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к некоторому стационарному и, в частности, статическому распределению  $\phi(x) \equiv (\phi_1(x), \phi_2(x))^T$ .

С физической точки зрения, необходимость изучения статических решений непосредственно вытекает из условий эксперимента по измерению вольт-амперных характеристик слоев и, в частности, зависимостей критический ток–магнитное поле (см. [6]). Предположим, что один или оба слоя “работают” в резистивном режиме (см. [15]). Тогда напряжения, измеряемые на слоях,  $V_1(t) \neq 0$  и/или  $V_2(t) \neq 0$ , причем по закону Ома полное напряжение  $V(t)$  на структуре (см. фиг. 1) имеет вид

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t). \tag{4}$$

Здесь средние напряжения на отдельных слоях определяются в соответствии с соотношениями Джозефсона

$$V_i(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi_{i,i}(t, x) dx, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Если же оба слоя работают в джозефсоновском режиме (при заданном  $h_B$  ток через структуру меньше некоторого критического значения), то напряжения, измеряемые на слоях,  $V_1(t) = 0$  и  $V_2(t) = 0$ , что приводит к  $\phi_{i,i}(t, x) = 0$ .

Отметим, что в случае модели с емкостным взаимодействием между слоями (см., например, [11] и цитированную там литературу) вместо (5) следует использовать обобщенные соотношения Джозефсона.

Уравнение (1) имеет, как правило, более чем одно статическое решение. Поэтому для того, чтобы определить конечное состояние контакта, необходимо исследовать статические решения на устойчивость. В геометрии с перекрытием (см. [15]) вектор (пара) статических распределений магнитного потока  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))^T$  в ДК удовлетворяет краевой задаче

$$-A\phi_{xx} + J_z(\phi) + \Gamma = 0, \tag{6a}$$

$$\phi_x(\pm l) = H. \tag{6b}$$

Отметим, что решения (6) зависят гладким образом как от физической координаты  $x$ , так и от параметров  $l, s, h_B$  и  $\gamma$ , т.е.  $\phi = \phi(x, p)$ , где через  $p \equiv \{l, s, h_B, \gamma\}$ ,  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ , обозначен 4-вектор параметров модели. Далее зависимость от  $p$  выписываем только при необходимости.

Для ясности при дальнейшем изложении необходимо коротко остановиться на некоторых основных типах статических решений в линейных однослойных ДК. При коэффициенте связи  $s \rightarrow 0$  аналогичные решения имеются и в двухслойных ДК.

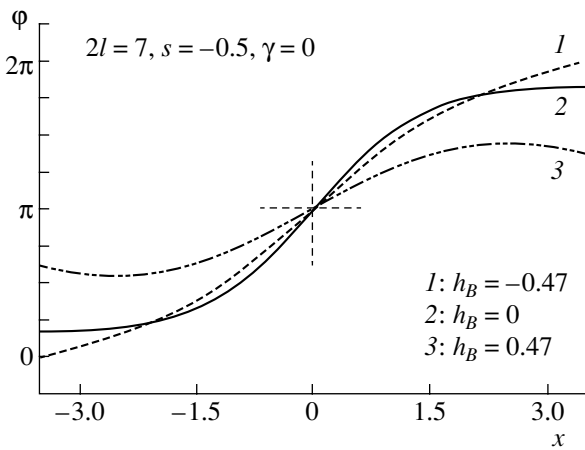
В нулевом поле ( $h_B = 0$ ) и при нулевом токе ( $\gamma = 0$ ) каждое из дифференциальных уравнений в (6) имеет множество мейсснеровских (тривиальных, вакуумных) решений вида  $\phi(x) = k\pi$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В частности, решение  $\phi(x) = 0$  устойчивое, а  $\phi(x) = \pi$  неустойчивое. Далее устойчивые мейсснеровские решения обозначаем коротко через  $M$ .

Более сложными являются решения, которые физически соответствуют вихревым распределениям магнитного потока в контакте. Простейшими вихревыми решениями являются флюксонное/антифлюксонное решения (ниже используются сокращенные обозначения  $\Phi \equiv \Phi^1$  и  $\Phi^{-1}$ ), для которых в “бесконечном” контакте ( $l \rightarrow \infty$ ) при  $h_B = 0$  и  $\gamma = 0$  имеются известные точные аналитические выражения

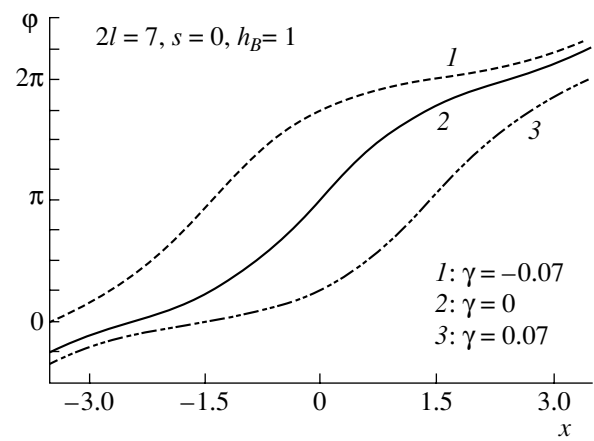
$$\Phi_{\infty}^{\pm 1} \equiv \phi(x) = 4 \arctg \exp(\pm x) + 2k\pi. \tag{7}$$

В контактах конечной длины объекты вида (7) не являются флюксонами в строгом смысле слова, но ряд их особенностей, в частности конечные энергия и размеры, обуславливают целесообразность и удобство использования такой терминологии.

При значениях  $|h_B| \geq 0$  и  $\gamma = 0$  в однослойном контакте конечной длины  $2l$  могут существовать многофлюксонные распределения, для которых ниже используются обозначения вида  $\Phi^n$ . Здесь



Фиг. 2.



Фиг. 3.

целое число  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  есть число вихрей, определяемое как функционал (см. [16]):

$$n \equiv N[\varphi](p) = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi(x, p) dx. \quad (8)$$

Для “бесконечного” контакта выражение в правой части следует понимать в смысле предельного перехода.

Так как любое решение  $\varphi(x)$  задачи (1) определено с точностью до  $2k\pi$ , то и значение  $N[\varphi]$  определено с точностью до  $2k$ . Произвол в выборе  $k$  можно использовать для “согласования” знака  $n$  со знаком полного магнитного потока распределения (3), т.е. с направлением магнитного поля вихря. В частности для флюксонного решения  $\Phi$  вида (7) выбирая  $k = 0$ , а для антифлюксонного  $\Phi^{-1}$  – соответственно,  $k = -1$ , легко проверить, что  $N[\Phi^{\pm 1}] = \pm 1$ .

Для зависящих от времени решений  $\phi_i(t, x)$  нестационарной задачи (1) функция  $N_i[\phi_i](t)$  и среднее напряжение на слое  $\bar{V}_i(t)$  в силу (4) связаны очевидным соотношением

$$\bar{V}_i(t) = \pi N_{i,i}[\phi_i](t).$$

Таким образом, независимость числа флюксонов в конкретном слое  $i$  от времени  $t$  (т.е.  $N_{i,t} = 0$ ) эквивалентна равенству нулю среднего напряжения на слое. При этом в рамках линейной теории устойчивости ненулевое напряжение на слое вызвано бифуркацией некоторого устойчивого распределения магнитного потока.

В качестве примеров отметим, что при внешнем токе  $\gamma = 0$  и любом допустимом поле  $h_B$   $M$ -решение и  $n$ -флюксонное/антифлюксонное распределение  $\Phi^n$  характеризуются, соответственно, значениями  $N[M] = 0$  и  $N[\Phi] = \pm n$ . Другими словами, функционал (8) не зависит от параметра  $h_B$ . Для иллюстрации на фиг. 2 представлены  $\Phi$ -кривые при  $\gamma = 0$  для значений внешнего поля  $h_B$ . В рассматриваемом случае геометрически сохранение величины  $N[\Phi]$  означает сохранение соответствующих площадей под кривыми при изменении поля  $h_B$ , причем высота “центра”  $\varphi(0) = \pi$  также не зависит от  $h_B$ . Отметим, что независимость значения  $N[\varphi]$  от магнитного поля  $h_B$  имеет место для любого распределения магнитного потока во всех линейных статических моделях ДК при отсутствии внешнего тока  $\gamma$  либо тока, обусловленного, например, переменной геометрией контакта (см. [17]).

В заданном поле  $h_B$  внешний ток  $\gamma \neq 0$  выталкивает магнитное поле из ДК, смещая его от середины  $x = 0$  направо ( $\gamma > 0$ ) или налево ( $\gamma < 0$ ). Этот эффект иллюстрируется на фиг. 3 для  $\Phi$ -распределения в поле  $h_B = 1$  при трех значениях параметра  $\gamma$ . Для распределений вида  $\Phi^n$  число вихрей (8) при токе  $\gamma \neq 0$  становится дробным.

При токе  $\gamma = \gamma_{cr}$  некоторое первоначально устойчивое для  $|\gamma| < |\gamma_{cr}|$  распределение “срывается” и переходит в неустойчивое состояние. Значение  $\gamma_{cr}$  будем называть критическим током распределения. В физическом эксперименте потеря устойчивости (срыв) распределения с наибольшим

критическим током при заданном магнитном поле  $h_B$  соответствует наиболее вероятному переходу ДК из статического состояния с нулевым напряжением на квазичастичную ветвь вольтамперной характеристики. Разумеется, в конкретном эксперименте возможна также реализация менее вероятных (менее энергетически выгодных) распределений (см., например, [18]). Другими словами, критический ток контакта – это максимальный ток, при котором контакт остается сверхпроводящим. С математической же точки зрения срыв некоторого распределения означает, что происходит бифуркация конкретного решения задачи (6) при изменении параметра  $\gamma$  (см. [14]).

При некоторых значениях параметров  $h_B$  и  $\gamma$  в ДК могут образовываться более сложные вихревые конфигурации, которые можно рассматривать как результат нелинейного взаимодействия цепочек флюксонов и/или антифлюксонов. Такие решения, которые обозначаем через  $\Phi^n \Phi^m$ ,  $|n| + |m| > 0$ , могут иметь дробное число вихрей (8) и при заданном  $h_B$  существуют парами, соответствующими перестановке “степеней”  $n \leftrightarrow m$ . При этом сумма чисел вихрей пары является целым числом (см. [16]). Простейшим примером является “бризерные” решения вида  $B \equiv B^1$  и  $B^{-1}$  (см. ниже), для которых при токе  $\gamma = 0$  выполнено  $M[B^{\pm 1}] = \pm 1$ .

В двухслойном ДК при  $s < 0$  распределения магнитного потока в отдельных слоях деформируются из-за взаимодействия между слоями, образуя при этом связанные пары. При одних и тех же значениях параметров  $h_B$  и  $\gamma$  распределения в отдельных слоях, а также соответствующая им пара распределений могут быть устойчивыми, либо неустойчивыми. В физическом эксперименте переход к неустойчивости некоторого парциального распределения при достижении критического тока  $\gamma = \gamma_{cr}$  выражается в возможном (с вероятностью, зависящей от энергии распределения) скачкообразном возникновении разности потенциалов на одном из слоев, а следовательно, в силу закона Ома (4), и на контакте в целом (см. фиг. 1). В многослойных ДК ситуация существенно усложняется тем, что возможны эксперименты по определению критического тока для отдельных слоев, групп слоев, а также для структуры в целом.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАГНИТНОГО ПОТОКА

#### 1. Вариационный принцип

Уравнение (6а) и краевые условия (6б) могут рассматриваться как необходимые условия экстремума функционала полной энергии контакта

$$F[\varphi] = \int_{-l}^l \left[ \frac{1}{2} \langle \varphi_x, A \varphi_x \rangle + U(\varphi) \right] dx - \langle AN, \Delta \varphi \rangle. \tag{9}$$

Область определения функционала (9) есть множество всех гладких на отрезке  $[-l, l]$  вектор функций  $\varphi(x)$ , концы которых лежат на вертикальных прямых  $x = \pm l$ . Тогда нетрудно проверить, что (6а) представляет собой уравнение Эйлера–Лагранжа для (9), а краевые условия (6б) вытекают из условия Вейерштрасса–Эрдмана (см. [19]).

При дальнейших рассмотрениях удобно переписать полную энергию (9) в виде суммы:

$$F[\varphi] = F_1 + F_2 + F_{12}. \tag{10}$$

Здесь через  $F_i$  обозначены энергии невзаимодействующих слоев

$$F_i[\varphi_i] = \int_{-l}^l \left( \frac{1}{2} \varphi_{i,x}^2 + 1 - \cos \varphi_i + \gamma \varphi_i \right) dx - h_B \Delta \varphi_i,$$

а энергия связи  $F_{12}$  вычисляется таким образом:

$$F_{12}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{s}{1-s^2} \int_{-l}^l \left[ \frac{s}{2} (\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{2,x}^2) - \varphi_{1,x} \varphi_{2,x} \right] dx + \frac{s}{1+s} h_B (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2).$$

При теоретическом рассмотрении изучение устойчивости распределений магнитного потока в однослойном (единичном) ДК сводится (см. [14]) к нахождению первых нескольких собственных значений (СЗ) некоторой задачи Штурма–Лиувилля (ЗШЛ) с потенциалом, определяемым конкретным распределением. При таком подходе устойчивость некоторого распределения эквивалентна положительной определенности второй вариации функционала энергии. Применение аналогичной идеи к широкому классу задач механики и физики имеется, например, в [20]–[23].

## 2. Парциальная устойчивость распределений в слоях ДК

Для анализа устойчивости распределений магнитного потока в  $i$ -м слое двухслойного ДК, в соответствии с теорией парциальной устойчивости (устойчивости по части переменных) [13], необходимо рассмотреть вторую вариацию функционала (10) при фиксированном распределении в соседнем слое. Предполагается, что пара  $\varphi(x)$  является решением нелинейной краевой задачи (6). При этом изучение характера экстремума функционала (10) в точке  $\varphi_i(x)$  эквивалентно изучению характера экстремума суммы  $F_i + F_{12}$ . Для этой цели рассмотрим зависящее от реального параметра  $\varepsilon$  семейство возмущений  $\varphi_i(x) + \varepsilon u_i(x)$  состояния  $\varphi_i(x)$  в  $i$ -ом слое контакта. Отсюда обычным образом (см. [19]) приходим к регулярной ЗШЛ

$$-a_{ii}u_{i,xx} + q_i(x)u_i = \mu_i u_i, \quad (11a)$$

$$u_{i,x}(\pm l) = 0, \quad (11б)$$

$$\int_{-l}^l u_i^2(x) dx - 1 = 0, \quad (11в)$$

потенциал которой  $q_i(x) = \cos \varphi_i(x)$  определяется через решение  $\varphi_i(x)$ . Далее будем (11) называть парциальной ЗШЛ для  $i$ -го слоя.

На конечном отрезке  $[-l, l]$  задача (11) имеет ограниченный снизу дискретный спектр (см. [19])

$$-1 \leq \mu_{i\min} \equiv \mu_{i0} < \dots < \mu_{in} < \dots$$

При этом каждому собственному значению  $\mu_{in}$  отвечает единственная с точностью до знака собственная функция (СФ)  $u_{in}(x)$ , для которой выполнено условие нормировки (11в). Число нулей  $u_{in}(x)$  на интервале  $(-l, l)$  равно  $n$ . В частности, СФ  $u_{i0}(x)$ , соответствующая минимальному СЗ  $\mu_{i0}$  не имеет нулей при  $x \in (-l, l)$ .

Так как потенциал  $q_i(x)$  определяется через решения краевой задачи (6), то СЗ и СФ задачи Штурма–Лиувилля (11) также будут гладкими функциями этих параметров, т.е.  $\mu_{in} = \mu_{in}(p)$ ,  $u_{in} = u_{in}(x, p)$ .

Будем говорить, что имеет место бифуркация порядка  $n \geq 0$  распределения  $\varphi_i(x)$ , если СЗ с номером  $n$  соответствующей ЗШЛ (11) удовлетворяет условию

$$\mu_{in}(p) = 0. \quad (12)$$

Бифуркация минимального порядка  $n = 0$  соответствует бифуркации устойчивого (см. [21]) статического распределения  $\varphi_i(x)$  в неустойчивое и наоборот. При этом (11a) представляет собой уравнение Якоби из [24] для функционала  $F_i + F_{12}$ . Для устойчивых решений выполняется  $\mu_{i0}(p) > 0$ , и, следовательно, функционал  $\delta^2(F_i + F_{12})$  положительно определен.

Таким образом, по спектру ЗШЛ (11) можно судить об устойчивости  $\varphi_i(x)$  в линейном приближении. Поэтому при  $\mu_{i0} > 0$  целесообразно назвать решение  $\varphi_i(x)$  парциально устойчивым. Если же  $\mu_{i0} < 0$ , то решение  $\varphi_i(x)$  будем называть парциально неустойчивым. При  $n > 0$  имеет место бифуркация парциально неустойчивого решения задачи (6) в некоторое другое парциально неустойчивое решение.

В дальнейшем будем считать, что длина  $2l$  контакта и параметр связи  $s$  фиксированы (бифуркации вихрей в джозефсоновском контакте при варьировании  $l$  изучались в [17], [24]). Уравнение

$$\mu_{i0}(h_B, \gamma) = 0 \quad (13)$$

определяет в неявном виде бифуркационную кривую для распределения  $\varphi_i(x)$  на параметрической плоскости  $\mathcal{P}_{h\gamma} \equiv \{h_B, \gamma\} \in \mathbb{R}^2$ . Для заданного поля  $h_B$  значение  $\gamma = \gamma_{cr}$ , удовлетворяющее (13), будем называть критическим током для соответствующего распределения магнитного потока. Наибольшим среди критических токов устойчивых распределений, существующих при заданном  $h_B$ , является критический ток слоя. В соответствии с формулой (4), критический ток двухслойного ДК есть меньший из критических токов слоев.

Отметим, что в однослойных ДК бифуркации порядка  $n \geq 1$  представляют собой главным образом математический интерес, что обусловлено малым временем жизни (см. [14]) неустойчивых распределений. В двухслойных ДК, как будет продемонстрировано ниже, благодаря взаимо-

действию между слоями парциальные бифуркации высших порядков магнитных потоков могут играть существенную роль.

Рассмотрим важный частный случай. Будем говорить, что решение  $\varphi(x)$  уравнения (6а) симметрично (см. [6]), т.е. пара  $\varphi(x)$  симметрична, если выполнено  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ . Примеры симметричных пар решений представлены ниже. Для симметричных распределений магнитного потока краевая задача (6) существенно упрощается (для удобства индекс координаты  $i$  опускается):

$$-a\varphi_{xx} + \sin\varphi + \gamma = 0, \quad \varphi_x(\pm l) = h_B. \tag{14}$$

Здесь коэффициент  $a = a_{11} + a_{12} = 1/(1 + s)$ ,  $a \in [1, \infty)$ , причем  $a \geq a_{ii}$ .

### 3. Алгоритмы вычисления точек бифуркации

Для вычисления точек бифуркации решений задачи (6), следуя [25], рассмотрим (6), (11) в виде единой системы, общее решение которой зависит от пяти параметров  $p$  и  $\mu_i$ . Для вычисления некоторого частного решения необходимо зафиксировать четыре из них, тогда пятый определяется как решение системы.

В зависимости от того, какие из параметров считаются фиксированными следует рассматривать два класса задач.

В простейшем случае, когда заданы все координаты вектора  $p$ , задача расщепляется на независимые подсистемы (6) и (11). При этом искомым является СЗ  $\mu_i$ , что соответствует проверке парциальной устойчивости координаты  $\varphi_i(x)$  уже вычисленной пары  $\varphi(x)$ . Пусть для некоторого  $h_B$  (либо для некоторого  $\gamma$ ) величина  $\mu_i > 0$ . Варьируя поле  $h_B$  при заданном токе  $\gamma$  (либо ток  $\gamma$  при фиксированном  $h_B$ ), можно добиться выполнения условия (13) с наперед заданной точностью, т.е. вычислить одну точку бифуркационной кривой, соответствующей решению  $\varphi_i(x)$ .

Если величина  $\mu_i$  задана, то (6), (11) представляет собой замкнутую систему для функций  $(\varphi(x), u_i(x))$  и одного из множества параметров  $p$ , который обозначим через  $\xi$  (соответственно, через  $\check{p}$  обозначена совокупность параметров  $p$  без  $\xi$ ). Для численного решения такой нелинейной задачи на СЗ со спектральным параметром  $\xi$  удобно применять итерационный алгоритм (см. [17], [25]), базирующийся на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН, из [26]). Полагая  $\mu_i = 0$ , при помощи подходящего выбора начального приближения можно удовлетворить условию (12) при  $n \geq 0$ . Тем самым находим поверхность  $\xi(\check{p}; \varphi)$  в пространстве  $\mathcal{P}$ , соответствующую бифуркации порядка  $n$  решения  $\varphi_i(x)$ . Срезы этой поверхности плоскостями, соответствующими двум фиксированным параметрам из множества  $\check{p}$ , представляют собой бифуркационные кривые  $\mu_{in}(\xi, \eta) = 0$  на плоскости  $\mathcal{P}_{\xi\eta}$  для оставшегося параметра  $\eta$  из  $\check{p}$  и параметра  $\xi$ .

Указанный метод непосредственного вычисления точек бифуркации распределений магнитного потока в одномерных длинных ДК предложен в [25] и применялся для решения широкого класса физических проблем (см. [16]).

Ввиду того что при заданных  $h_B$  и  $\gamma$  краевая задача (6), как правило, имеет более чем одно устойчивое решение, парциальная критическая кривая для  $i$ -ого слоя контакта строится как огибающая бифуркационных кривых различных решений в этом же слое. В частности, парциальная критическая кривая вида ток–магнитное поле состоит из кусков таких же критических кривых (13), соответствующих различным вихрям с наибольшим при заданном  $h_B$  током  $\gamma$ .

Остановимся коротко на вычислении точек пересечения кусков парциальных бифуркационных кривых для  $i$ -ого слоя. Зафиксируем геометрические параметры  $l$  и  $s$ . Пусть  $(h_c, \gamma_c)$  – координаты некоторой точки пересечения  $C$  на плоскости  $\mathcal{P}_{h\gamma}$ . Каждая такая точка соответствует обращению в ноль СЗ ЗШЛ (11) для двух решений  $\varphi^L(x)$  и  $\varphi^R(x)$ , бифуркационные кривые которых расположены слева ( $L$ ) и справа ( $R$ ) от точки  $C$ . Обозначим через  $(\mu_i^L, u_i^L(x))$  и  $(\mu_i^R, u_i^R(x))$  СЗ и СФ парциальных ЗШЛ вида (11), порожденных распределениями  $\varphi_i^L(x)$  и  $\varphi_i^R(x)$ . Тогда при условии, что в точке  $C$  должно быть

$$\mu_i^L(h_c, \gamma_c) = 0, \quad \mu_i^R(h_c, \gamma_c) = 0,$$

приходим к следующей краевой задаче:

$$-A\varphi_{xx}^L + J_z(\varphi^L) + \Gamma_c = 0, \quad \varphi_x^L(\pm l) = H_c, \quad -a_{ii}u_{i,xx}^L + \cos\varphi_i^L u_i^L = 0, \quad u_{i,x}^L(\pm l) = 0, \tag{15a}$$

$$-A\varphi_{xx}^R + J_z(\varphi^R) + \Gamma_c = 0, \quad \varphi_x^R(\pm l) = H_c, \quad -a_{ii}u_{i,xx}^R + \cos\varphi_i^R u_i^R = 0, \quad u_{i,x}^R(\pm l) = 0, \quad (15b)$$

где векторы  $H_c = h_c(1, 1)^T$  и  $\Gamma_c = \gamma_c(1, 1)^T$ . Система (15) содержит шесть неизвестных функций  $(\varphi^L(x), u_i^L(x))$ ,  $(\varphi^R(x), u_i^R(x))$ , а также два неизвестных параметра – поле  $h_c$  и ток  $\gamma_c$ . Для замыкания задачи добавляем два условия нормировки парциальных волновых функций  $u_i^L(x)$  и  $u_i^R(x)$ , например

$$\int_{-l}^l [u_i^L(x)]^2 dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-l}^l [u_i^R(x)]^2 dx = 1. \quad (16)$$

Для решения двухпараметрической нелинейной задачи на СЗ (15), (16) целесообразно применить алгоритм, основанный на НАМН, выбирая подходящим образом начальные приближения.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для численного решения рассмотренных выше нелинейных краевых задач использовался итерационный алгоритм, основанный на НАМН. Возникающие на каждой итерации линейризованные краевые задачи решались численно при помощи метода конечных элементов (МКЭ) на основе соответствующей формы Галеркина (см. [27]).

Дискретизация при помощи МКЭ использовалась также в решении задач ЗШЛ, возникающих при проверке устойчивости решений. Соответствующие алгебраические задачи на СЗ для матричных пучков решались методом итераций подпространств (см. [28]).

Рассмотрим в качестве примера построение разностной схемы для ЗШЛ. Для удобства сначала остановимся на случае одного (скалярного) уравнения. Для этой цели запишем (11) в следующем общем виде:

$$-au_{xx} + q(x)u = \mu u, \quad (17a)$$

$$u_x(\pm l) = 0, \quad (17b)$$

$$\int_{-l}^l u^2(x) dx - 1 = 0. \quad (17b)$$

Умножим скалярно уравнение (17a) на пробную функцию  $v(x)$ ,

$$v(x) \in H^1(-l, l) = \{v : v, v_x \in L^2(-l, l)\},$$

и проинтегрируем по частям с использованием условий (17b):

$$\int_{-l}^l [au_x v_x + q(x)uv] dx = \mu \int_{-l}^l uv(x) dx \quad \forall v \in H^1.$$

Здесь и ниже через  $L^2$  и  $H^1$  обозначены соответствующие функциональные пространства (см. [29]).

Для дискретизации интегрального тождества используем изопараметрические квадратичные конечные элементы.

Пусть  $\Pi = \{-l = x_1 < \dots < x_n = l\}$ ,  $x_{i+1} - x_i = h_i \leq h$ , – разбиение интервала  $[-l, l]$  на конечные элементы  $e_i = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ .

Пусть, далее,  $S^h = \{v^h(x), v^h(x) \in C[-l, l], v^h(x)|_{e_i} \in P_2\}$  – конечномерное пространство пробных функций,  $S^h \subset H^1$ ,  $P_2$  – множество полиномов второй степени. В пространстве  $\mathbb{R} \times S^h$  ищем такую пару  $\{\mu^h, u^h\}$ , что

$$\int_{-l}^l [au_x^h v_x^h + q(x)u^h v^h] dx = \mu^h \int_{-l}^l u^h v^h dx \quad \forall v^h \in S^h.$$

Преобразуем элемент  $e_i = [x_i, x_{i+1}]$  в стандартный элемент  $E = [-1, 1]$  при помощи преобразования  $x = x_i + (\theta + 1)(x_{i+1} - x_i)/2$ . Здесь параметр  $\theta \in [-1, 1]$ .



Обозначим через  $\psi(\theta) = (\psi_1(\theta), \psi_2(\theta), \psi_3(\theta))^T$ , вектор квадратичных функций формы стандартного элемента  $E$  с координатами

$$\psi_1(\theta) = \theta(\theta - 1)/2, \quad \psi_2(\theta) = 1 - \theta^2, \quad \psi_3(\theta) = \theta(\theta + 1)/2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{e_i}^h(x(\theta)) &= \psi(\theta)v_{e_i}, & u_{e_i}^h(x(\theta)) &= \psi(\theta)u_{e_i}, \\ v_{x,e_i}^h(x(\theta)) &= \psi'(\theta)v_{e_i}, & u_{x,e_i}^h(x(\theta)) &= \psi'(\theta)u_{e_i}, \end{aligned}$$

где  $v_{e_i} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ,  $u_{e_i} = (u_1, u_2, u_3)^T$  суть 3-векторы значений функций  $u^h$  и  $v^h$  в узлах элемента  $e_i$ , а штрихом обозначено дифференцирование по локальной переменной  $\theta$ .

В этих обозначениях для левой части интегрального тождества получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^l [a u_x^h v_x^h + q(x) u^h v^h] dx = \\ &= \sum_{e_i} \int_{e_i} [a (v_{x,e_i}^h)^T (u_{x,e_i}^h) + q(x) (v_{e_i}^h)^T (u_{e_i}^h)] dx = \\ &= \sum_{e_i} \left[ v_{e_i}^T |J|^{-1} a \int_{-1}^1 [\psi']^T [\psi'] ds u_{e_i} + v_{e_i}^T |J| \int_{-1}^1 q(x(\theta)) \psi^T \psi ds u_{e_i} \right] = \\ &= \sum_{e_i} [v_{e_i}^T K_{e_i}^1 u_{e_i} + v_{e_i}^T K_{e_i}^0 u_{e_i}] = \sum_{e_i} [v_{e_i}^T (K_{e_i}^1 + K_{e_i}^0) u_{e_i}] = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T K_{e_i} u_{e_i} = V^T K U^h, \end{aligned}$$

где  $|J| = (x_{i+1} - x_i)/2$  – якобиан преобразования, матрица  $K = K^1 + K^0 = [k_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 2N - 1]$  – глобальная матрица жесткости (см. [28]), а  $U^h = (U_1, \dots, U_{2N-1})^T$  – глобальный вектор значений функции  $u^h(x)$  в узлах конечноэлементной сетки.

Аналогично, для правой части интегрального тождества имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^l u^h v^h dx = \sum_{e_i} \int_{e_i} (v_{e_i}^h)^T (u_{e_i}^h) dx = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T |J| \int_{-1}^1 \psi^T \psi ds u_{e_i} = \\ &= \sum_{e_i} v_{e_i}^T M_{e_i} u_{e_i} = V^T M U^h, \end{aligned}$$

где  $M$  – глобальная матрица массы (см. [28]).

Таким образом, в результате приходим к алгебраической задаче на СЗ

$$K U^h = \mu^h M U^h \tag{18}$$

для матричного пучка с симметричными матрицами  $K$  и  $M$ .

При численной реализации хранятся и используются только верхние профили этих матриц в виде sky-line (см. [28]).

Задача (18) решается методом итераций подпространств (см. [28]).

## 5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численный эксперимент проводился для ДК длиной  $2l = 7$  при двух значениях параметра связи:  $s = -0.3$  и  $s = -0.5$ .

Построение критических кривых проводилось варьированием некоторого “бифуркационного” решения задачи (6) по одному из параметров  $h_B$  или  $\gamma$  при сохранении, например,  $\mu_1 = 10^{-3}$ . Для этой цели применялись алгоритмы продолжения по параметру, аналогичные изложенным в [30].

Отметим прежде всего, что если пара  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  – решение краевой задачи (6), то пара  $\bar{\varphi} = (\varphi_2, \varphi_1)^T$  – также решение (6). Для симметричных решений  $\varphi = \bar{\varphi}$ .

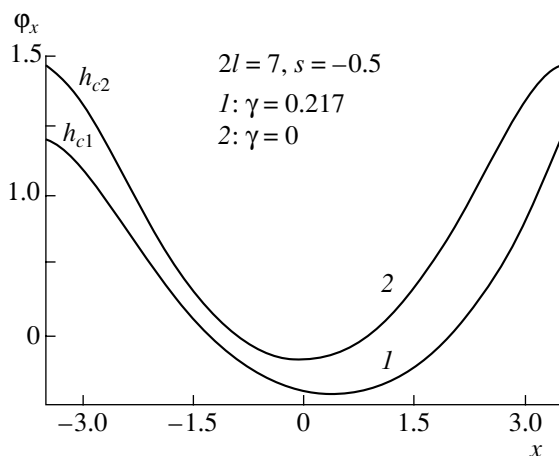
Конкретные примеры пар распределений в двухслойном ДК с  $s = -0.5$ , а также влияние поля  $h_B$  на устойчивость последних демонстрируются на фиг. 4–9, 13. В частности, на фиг. 4 представлены графики зависимостей  $\varphi_x(x)$  для устойчивого мейсснеровского решения  $M$  в небольшой окрестности ( $\mu_{10} = \mu_{20} = 10^{-3}$ ) двух точек бифуркации:  $(h_B = h_{c1} = 1.2, \gamma_{cr} \approx 0.217)$  и  $(h_B = h_{c2} \approx 2.03, \gamma_{cr} = 0)$ ;  $M$ -решение является симметричным, т.е.  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ . Собственное магнитное поле (производные  $\varphi_x(x)$ ) таких распределений локализовано в окрестности границ слоев. С физической точки зрения, последнее соответствует эффекту Мейсснера выталкивания контактом (экранирования) внешнего магнитного поля (см. [15]).

На фиг. 5 показаны “бифуркационные” зависимости  $\varphi_x(x)$  для однофлюксонного распределения  $\Phi$  при  $\gamma_{cr} = 0$  и  $\mu_{10} = \mu_{20} = 10^{-3}$ , т.е. на границах  $h_B = h_{c1} \approx 1.17$  и  $h_B = h_{c2} \approx 2.03$  области существования флюксона по полю  $h_B$ . В этом случае собственные магнитные поля  $\varphi_{i,x}(x)$  также симметричны относительно ординаты и локализованы в окрестности центра  $x = 0$  ДК.

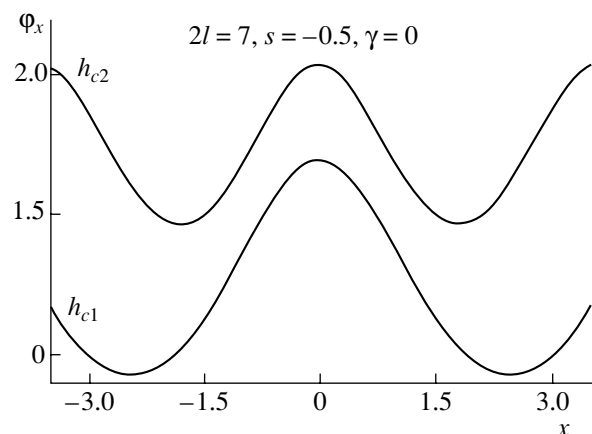
Зависимости собственных магнитных полей  $\varphi_{i,x}(x)$  несимметричных пар вида  $(\Phi, \Phi^{-1})$  при  $h_B = 0$  и  $h_B = 1$  в отсутствие внешнего тока  $\gamma$  даны на фиг. 6. Сплошные кривые представляют солитоны в первом (нижнем) слое, штриховые – во втором (верхнем) слое. Отметим, что при увеличении граничного поля  $h_B$  парциальная устойчивость ухудшается из-за перераспределения собственных магнитных полей в отдельных слоях. При этом  $N[\varphi_1] = 1$  и  $N[\varphi_2] = -1$  для любых допустимых  $h_B$ .

На фиг. 7 демонстрируются графики функций  $\varphi_x(x)$ , соответствующих несимметричным парам вида  $(\Phi, M)$  при  $h_B = 0, h_B = 1$  и токе  $\gamma = 0$ . При  $h_B = 0$  деформация устойчивой  $M$ -компоненты ( $\Delta\varphi_2 \approx 0.023$ ) от тривиального решения  $\varphi_2(x) = 0$  ( $\Delta\varphi_2 = 0$ ) при  $s = 0$  обязана взаимодействию между слоями. При токе  $\gamma = 0$  во всей области изменения поля  $h_B$  функционал (8) на решениях этого вида сохраняет постоянные значения:  $N[\varphi_1] = 1, N[\varphi_2] = 0$ .

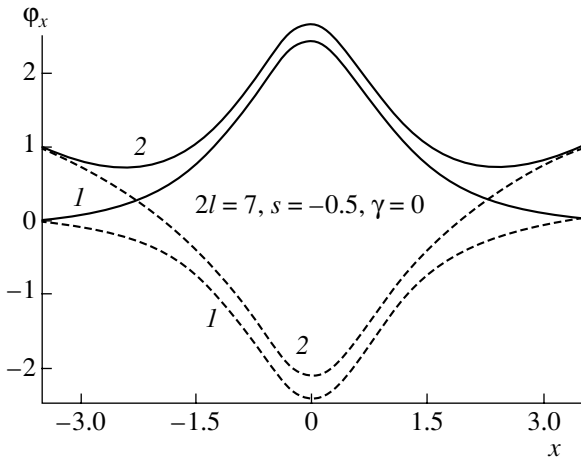
Распределения, представленные на фиг. 8, следует рассматривать как результат нелинейного взаимодействия неустойчивого мейсснеровского решения  $\bar{M}$  ( $\varphi_1(x) = \pi$  при  $s = 0, h_B = 0$  и  $\gamma = 0$ ) и флюксона  $\Phi$ , т.е. это пары вида  $(\bar{M}, \Phi)$ . Для таких решений при токе  $\gamma = 0$  в области допустимых полей  $h_B$  выполняются равенства  $N[\varphi_1] = 1, N[\varphi_2] = 1$ .



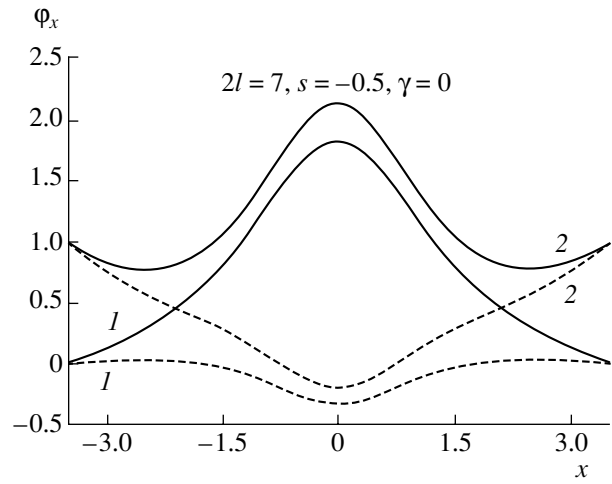
Фиг. 4.



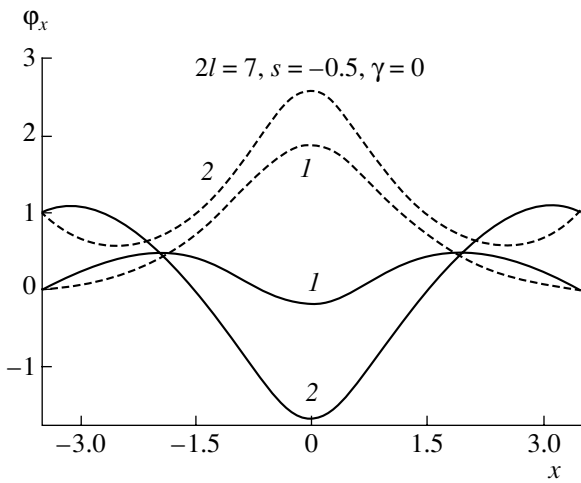
Фиг. 5.



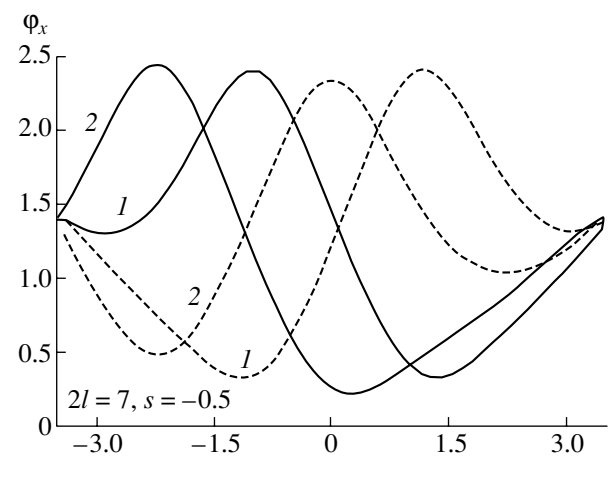
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

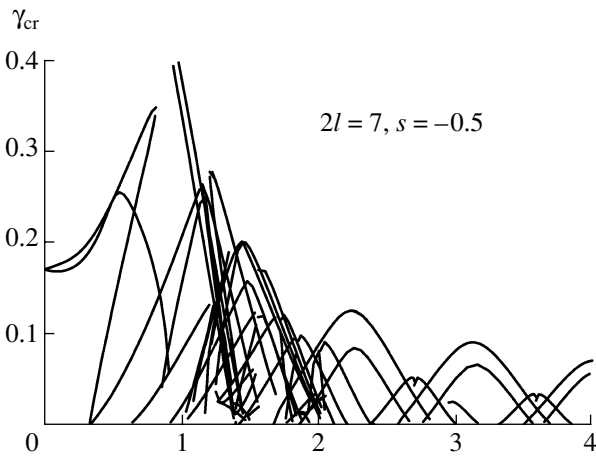
Распределения собственных магнитных полей пар вида  $(B, B^{-1})$  при  $h_B = 1.4$  приведены на фиг. 9. Кривые 1 соответствуют случаю  $\gamma = 0$ , когда решения обладают симметрией вида  $\varphi^1(x) = -\varphi^2(-x) + 2\pi k$ , т.е. их производные симметричны относительно вертикальной прямой  $x = 0$  (верхний индекс здесь указывает номер пары). Кроме 1 имеется также сопряженная пара  $(B^{-1}, B)$ . На таких решениях функционал (8) принимает дробные значения, но сумма  $N[\varphi_i^1] + N[\varphi_i^2] = 2$ . Кривые, отмеченные номером 2, вычислены для критического значения тока  $\gamma = \gamma_{cr} \approx 0.14$ .

Перейдем теперь к построению парциальных критических кривых вида ток–магнитное поле в двухслойном ДК.

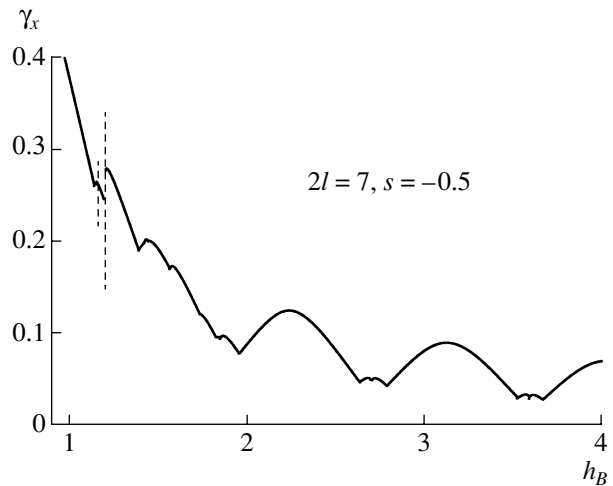
В случае симметричной матрицы  $A(s)$  парциальные бифуркационные зависимости для первого и второго слоев ДК совпадают. По этой причине далее рассматриваются только парциальные зависимости для распределений в первом слое.

Пусть при фиксированном  $\gamma$  и некотором  $h_B$  функция  $\varphi(x, h_B)$  есть решение (6). Тогда функция  $2\pi k - \varphi(x, -h_B)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , также есть решение в поле  $-h_B$ .

Для ДК-геометрии с перекрытием, рассматриваемых в настоящей работе, ток  $\gamma$  не входит в краевые условия. Тогда если  $\varphi(x, \gamma)$  – решение при некотором  $\gamma$ , то перемене знака тока (последнего слагаемого в (6а)) соответствует решение  $\varphi(x, -\gamma)$ .



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Отсюда вытекает симметрия критических зависимостей относительно перестановки осей  $\gamma \leftrightarrow -\gamma$  и  $h_B \leftrightarrow -h_B$  на плоскости  $\mathcal{P}_{h\gamma}$ . Указанные симметрии позволяют ограничиться рассмотрением бифуркационных зависимостей вида ток–магнитное поле только в первом квадранте.

На фиг. 10 приведены некоторые бифуркационные кривые вида (13) для ряда распределений  $\varphi_1(x)$  магнитного потока в первом слое ДК. Отметим, что разным решениям соответствуют разные знаки парциальных  $\mu_{20}(h_B, \gamma)$  СЗ.

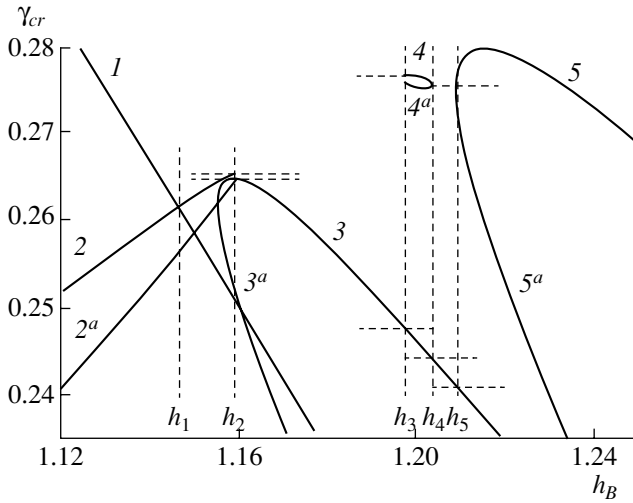
Подробное описание решений, соответствующих отдельным бифуркационным кривым, в рамках настоящей работы затруднительно ввиду их большого числа. Поэтому далее ограничимся перечислением только наиболее существенных для критической кривой слоя решений, имеющих при заданном магнитном поле  $h_B$  наибольший критический ток  $\gamma_{cr}$ . Куски бифуркационных кривых (13) таких решений образуют критическую кривую (см. фиг. 11) для первого слоя в ДК. Точки непрерывного “сочленения” отдельных кусков являются решениями нелинейной двухпараметрической задачи на СЗ (15), (16). Однако численный эксперимент показывает, что парциальная критическая кривая может иметь точки разрыва непрерывности, которые на фиг. 11 (см. также фиг. 12) обозначены вертикальными штриховыми прямыми. Значения внешнего магнитного поля  $h_B$ , для которых имеют место такие разрывы, а также величины скачков критического тока  $\Delta\gamma_{cr} \equiv \gamma_{cr}(S_R) - \gamma_{cr}(S_L)$  существенно зависят от конкретной модели контакта, а также от выбора параметров  $s$  и  $l$ . Здесь  $\gamma_{cr}(S_R)$  и  $\gamma_{cr}(S_L)$  – критические токи решений справа ( $R$ ) и слева ( $L$ ) от точки разрыва.

Механизм образования таких точек демонстрируется на фиг. 12. При  $h_B < h_1$  доминирующим является вклад симметричной мейсснеровской пары 1 (см. фиг. 4), которая на этом участке имеет наибольший критический ток в сравнении со всеми другими решениями задачи (6). При значении  $h_B = h_1$  бифуркационная кривая мейсснеровского решения пересекается с бифуркационной кривой пары 2 вида ( $\Phi, M$ ) (см. фиг. 7). В указанной точке пары 1 и 2 удовлетворяют задаче (15), (16). Таким образом, на отрезке  $h_B \in [h_1, h_2)$  критическая кривая ДК представлена “куском” бифуркационной кривой (13), соответствующей паре 2.

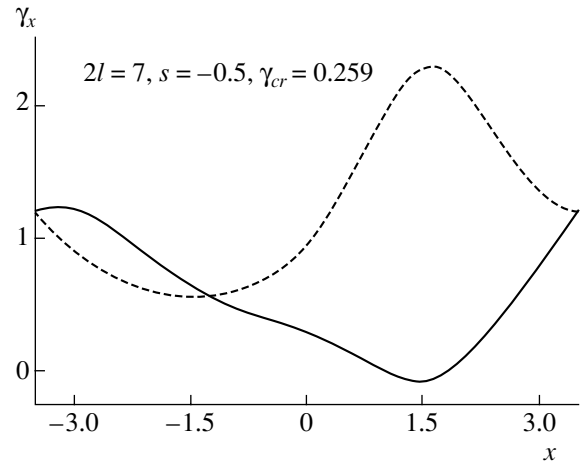
При  $h_B = h_2$  критическая кривая скачком переходит на ветвь, порожденную парой 3 вида ( $M, \Phi$ ) (это решение демонстрируется при  $h_B = 1.2$  на фиг. 13). В отличие от предыдущего случая, пары 2 и 3 не являются решениями задачи (15), (16), причем критический ток  $\gamma_{cr}(2) > \gamma_{cr}(3)$ . Другими словами, в поле  $h_2$  имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой (13) первого слоя на величину  $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(3) - \gamma_{cr}(2) \approx -0.001$ .

Отметим, что в точке  $h_B = h_2$  пара 2 переходит в пару 2<sup>a</sup> структуры ( $M, \Phi$ ). При этом (см. фиг. 14) функции  $\mu_{20}(h_B)$  имеют в указанной точке вертикальную касательную. Это означает, что в ноль обращаются высшие парциальные СЗ  $\mu_{21}(h_B, \gamma)$ , т.е. имеет место бифуркация порядка  $n = 1$  компоненты  $\varphi_2(x)$  пары 2.

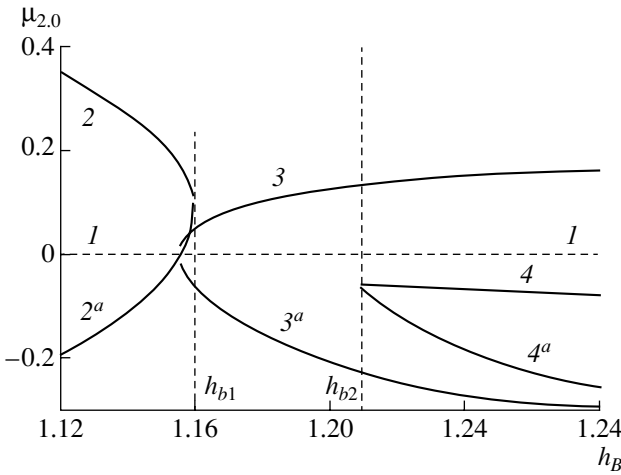
Аналогично, при  $h_B = h_3$  также имеет место разрыв непрерывности парциальной критической кривой, обусловленный разностью максимальных критических токов решений слева 3 и справа 4. Величина скачка тока  $\gamma$  в этом случае на порядок выше –  $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(4) - \gamma_{cr}(3) \approx 0.07$ . На отрезке



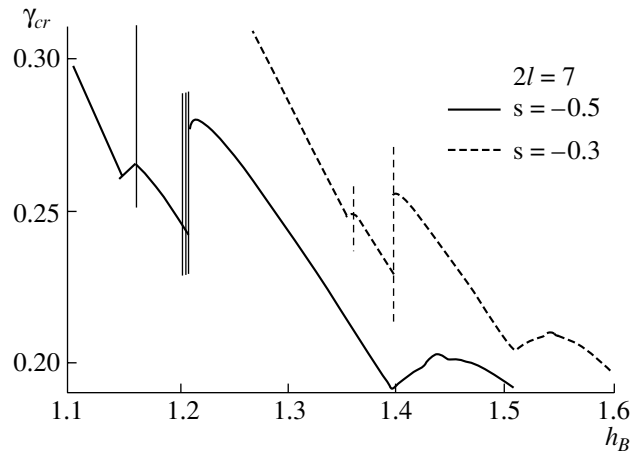
Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

$(h_3, h_4)$  критическая кривая ДК представлена ветвью пары 4. Далее, в точке  $h_B = h_4$  происходит снова скачок на ветвь бифуркационной кривой пары 3. При этом  $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(3) - \gamma_{cr}(4) \approx -0.08$ .

В точке  $h_B = h_5$  происходит очередной скачок критической кривой от ветви 3 на ветвь, принадлежащую паре 5. Величина скачка  $\Delta\gamma = \gamma_{cr}(5) - \gamma_{cr}(3) \approx 0.1$ .

Отметим, что при  $h_B = h_5$  решение с номером 5 переходит в решение  $5^a$ . При этом (см. фиг. 14) функция  $\mu_{20}(h_B)$  имеет в указанной точке скачок гладкости, т.е. происходит бифуркация порядка  $n = 1$  координаты  $\phi_2(x)$  пары 5.

На фиг. 15 демонстрируется влияние параметра связи между слоями  $s$  на частичную критическую кривую. Видно, что с уменьшением  $s$  критическая кривая сдвигается направо, стремясь тем самым к положению, соответствующему независимым слоям ( $s = 0$ ). При этом скачки критической кривой имеют более простую структуру. Например, в численном эксперименте решений вида 4 (см. фиг. 12) при  $s = -0.3$  не обнаружено, что говорит о наличии бифуркаций решений задачи (6) по параметру  $s$ .

### 6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе для моделирования устойчивости и бифуркаций статических конфигураций магнитного потока в двухслойном джозефсоновском контакте применяются методы теории

парциальной устойчивости. Показано, что с математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [5], [6], могут быть обусловлены наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых, положение которых зависит от выбора модели и значений параметров.

Отметим, что методы настоящей работы очевидным образом переносятся на случай несимметричной модели двухслойного ДК, а также на модели ДК с числом слоев больше двух.

Авторы благодарят Л.Н. Булаевского (Лос-Аламос, США), Голдобину (Тюбинген, Германия), Е.П. Жидкова и И.В. Пузынина (ОИЯИ, Дубна, Россия), а также Л. Лилову (Софийский университет “Св. Кл. Охридский”, Болгария) за стимулирующие дискуссии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В. Вычисление бифуркаций устойчивых состояний в двухслойных неоднородных джозефсоновских переходах // Сообщ. ОИЯИ P5-89-173. Дубна, 1989.
2. Sakai S., Bodin P., Pedersen N.F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // J. Appl. Phys. 1993. V. 73. № 5. P. 2411–2418.
3. Bulaevskii L.N., Zamora M., Baeriswyl D. et al. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors // Phys. Rev. B. 1994. V. 50. № 17. P. 12831–12834.
3. б. Bulaevskii L.N., Dominguez D., Maley M.P. et al. Collective mode and the c-axis critical current of a Josephson-coupled superconductor at high parallel magnetic fields // Phys. Rev. B. 1996. V. 53. № 21. P. 14601–14610.
4. Nevirkovets I.P., Evetts J.E., Blamire M.G. Transition from single junction to double junction behavior in s-type Nb-based devices // Phys. Letts. A. 1994. V. 187. Iss. 1. P. 119–126.
5. Goldobin E., Kohlstedt H., Ustinov A.V. Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators // Appl. Phys. Letts. 1996. V. 68. Iss. 2. P. 250–252.
6. Goldobin E., Ustinov A.V. Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1999. V. 59. № 17. P. 11532–11538.
7. Kleiner R., Muller P., Kohlstedt H. et al. Dynamic behavior of Josephson-coupled layered structures // Phys. Rev. B. 1994. V. 50. № 6. P. 3942–3952.
8. Song S.N., Auvil P.R., Ulmer M., Ketterson J.B. Vortex structure and Josephson supercurrent in stacked double Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1996. V. 53. Is. 10. P. R6018–R6021.
9. Koyama T., Tachiki M. I–V characteristics of Josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations // Phys. Rev. B. 1996. V. 54. № 22. P. 16183–16191.
10. Krasnov V.M., Winkler D. Static and dynamic properties of stacked Josephson junctions: Analytic solution // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. Is. 14. P. 9106–9115.
11. Tachiki M., Machida M. Current understanding of Josephson plasma theory and experiments in HTSC // Physica C 341-348. 2000. P. 1493–1498.
12. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Вып. I. Матем., механ. 1957. № 4. С. 9–16.
13. Vorotnikov V.I. Partial stability and control. Boston, MA: Birkhäuser, 1998.
14. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1984. Т. 86. Вып. 4. С.
15. Likharev K.K. Dynamics of Josephson junctions and circuits. New York: Gordon and Breach, 1986.
16. Бояджиев Т.Л. Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Дубна: ОИЯИ, 2002.
17. а. Семержиева Е.Г., Бояджиев Т.Л., Шукринов Ю.М. Статические вихри в длинных джозефсоновских контактах с экспоненциально изменяющейся шириной // Физ. низких т-р. 2004. Т. 30. № 6. P. 610–618.
17. б. Semerdjieva E.G., Boyadjiev T.L., Shukrinov Yu.M. Vortex structures in exponentially shaped Josephson junctions // J. Low Temperature Phys. 2005. V. 139. № 1/2. P. 299–308.
18. Выставкин А.Н., Драчевский Ю.Ф., Кошелец В.П., Серпученко И.Л. Обнаружение статических связанных состояний флюксонов в распределенных джозефсоновских переходах с неоднородностью // Физ. низких т-р. 1988. Т. 14. № 6. P. 646.
19. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.
20. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М., 1948.
21. Келлер Дж.Б., Антман С. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М.: Мир, 1974.
22. Jackiw R. Quantum meanings of classical field theory // Rev. Mod. Phys. 1997. V. 49. Is. 3. P. 681–706.
23. Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Многомерные солитоны. М.: Изд-во РУДН, 2001.

24. *Boyadjiev T.L., Todorov M.D.* Minimal length of Josephson junctions with stable fluxon bound states // *Superconducting Sci. and Techn.* 2002. V. 15. Is. 1. P. 1–7.
25. а. *Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В.* Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе // *Сообщ. ОИЯИ Р1 1-88-409.* Дубна, 1988.
25. б. *Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В.* Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах // *Сб. тр. конф. “Числ. методы и применения”.* София, 1988.
26. а. *Zhidkov E.P., Makarenko G.I., Puzynin I.V.* Continuous analog of the Newton method in non-linear physical problems // *Phys. of Elementary Particles and Atomic Nuclei (JINR, Dubna).* 1973. V. 4. № 1. P. 127–166.
26. б. *Puzynin I.V., Amirkhanov I.V., Zemlyanaya E.V. et al.* The generalised continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // *Phys. Elementary Particles and Atomic Nuclei (JINR, Dubna).* 1999. V. 30. № 1. P. 210–265.
27. *Thomee V.* Galerkin finite element method for parabolic problems. Berlin: Springer, 1997.
28. *Bathe K.J., Wilson E.* Numerical methods in finite element analysis. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1976.
29. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
30. а. *Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V.* Travelling solitons in the damped driven nonlinear Schroedinger equation // *SIAM J. Appl. Math.* 2004. V. 64. № 3. P. 800–818.
30. б. *Земляная Е.В., Баращенко И.В.* Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией // *Матем. моделирование.* 2005. Т. 17. № 1. С. 65–78.